日本歯科大学紀要　第45巻　1-7頁，2016，3月
http://doi.org/10.14983/00000749
CODEN:NSDKDD　ISSN 0385-1605

アンケートを通してみる学生の状況(IV):「自然現象の数学」に関して

A Lecture Questionnaire about Mathematics IV

山田物理学研究所　山　田　弘　明*
新潟生命歯学部　山　下　陽　介
新潟生命歯学部　小　野　裕　明

Hiroaki YAMADA[1], Yousuke YAMASHITA[2] and Hiroaki ONO[2]

[1]Yamada Physics Research Laboratory
5-7-14 Aoyama, Nishi-ku, Niigata-shi, Niigata, 950-2002

[2]The Nippon Dental University School of Life Dentistry at Niigata
1-8 Hamaura-cho, Chuo-ku, Niigata 951-1500

Abstract: We investigated basic understanding of Probability and Statistics in new curriculum of high school by questionnaires given to the students. Based on the result, we discuss about the importance of the "Statistics literacy education" in university education and social life.
Keywords: Mathematics, statistics, probability, education, students, questionnaire

(2015年11月11日　受理)

1　はじめに

これまで、「自然現象の数学」の講義に関連した学生アンケートの結果などを紹介してきた[1) 2) 3) 4)]。本稿では、確率・統計に関する学生アンケートの結果と確率・統計に基づく物事の見方の重要性を身近な例を通して紹介する。

イギリスの数理統計学者カール・ピアソンは「統計学は科学の文法である」と言った[1]。数学者でマジシャンでもあるアーサー・ベンジャミンは、「数学の教育を変えるのは統計である」と主張している[2]。実際に、新聞やテレビなどで内閣支持率やテレビ視聴率、平均寿命、天気予報、志望校の偏差値、ジニ係数、エンゲル係数など、日常的に統計的データや数値を見ない日は無い[5)]。これらは調査結果を基に推計された数値であり、研究者なら良くも悪くも気になる人が多い impact factor や eigen factor[3]もまたそういう量である。

また、ゲームやギャンブルといった遊興だけでなく、商品の売れ筋傾向や人の流れなどのデータにおいても、一見ランダムに見えるものが確率的に予見できるようになり、解析の結果が様々な場面で利用されている。実際、ランダムサンプリングによる手荷物検査という統計手法はテロ対策に使われているし、奈良時代の人口に統計学からの見積もりを与えることで、歴史の観方にすら影響する場合もある。

さらに、ネットワーク社会においては、統計を利用することでクレジットカードや銀行取引が安全に利用でき[4]、あるいは、さまざまなビッグデータの解析が企業や政府組織の判断に影響を与えているため、現代においては、データ解析が経済、社会、流通の根幹を支えているともいえる。そこでは、何

*日本歯科大学新潟生命歯学部非常勤講師「自然現象の数学」担当。
Email:hyamada[at]uranus.dti.ne.jp

[1]近代的数理統計学の基礎を築いた人物の一人である。

[2]一部の人が使う代数学よりも、すべての人が使える統計を学ぶべきだとも言っている。

[3]トムソン・ロイター社が提供する学術雑誌の評価基準のひとつ[6)]。もちろん、個人の論文業績を評価する際は当てにならない。

[4]大きな素数の存在がそれを支えている。

かを判断する材料(判断材料)、つまり根拠(エビデンス)となるデータを見つけることが統計学の役目のひとつである[7)-22)]。元々、生命科学の領域では因果関係が明確でない複雑な現象が多い[5]。新薬の有効性に関する判断もそうであるが、ますます科学的根拠に基づく医療 EBM(evidence based-medicine)が必要になっている。GRN(Gene regulatory network)もバイオインフォマティクスの典型的な賜物である。

これらは現代社会の利害関係や世知辛い競争社会の象徴とも取れるが、生活の中で不正を見抜き、他人に騙されないために必要な知恵でもある[6]。数式や数字を使うことから統計学は数学の一部と考える人もいるが、実際の数学と統計学の見方・考え方には重要な違いがある。数学は前提となる公理を演繹的な手法を用いて定理を導く学問であり、一方の統計学は経験した事実から出発し、その背後にある真理を探る学問である。その点で、数学は論理学に似ているが、統計学は生物学や物理学と似ている。

また、統計学は意味（情報）を引き出す技術（手段）であり、データ収集をすること自体も統計学に含まれる。IT 技術の進化に伴い、統計学とセットで語られることが多いビッグデータ解析やテキストマイニングなどの実用化により、統計学をビジネスや公衆衛生の分野で利用することが可能となった。そのため、確率論を含む統計学の理論的基礎を理解することは今後さらに重要になり、統計理論を的確に活用するためには、「統計リテラシー」がより必要となってくる。実際、モデル・コア・カリキュラムや新学習指導要領などにおけるデータ解析、統計的知識の重要性の強調はそれを示したものになっている[23)]。

本稿では、2 節で高校新課程での確率統計関連分野の用語などについて、学生アンケートの結果を示す。3 節において「自然現象の数学」の講義で導入として行っている「サイコロ実験」を、また、4 節では学生の興味を引くように講義で用いている確率・統計に関する話題のいくつかを紹介する[1)]。

2 高校新課程の中での確率統計とアンケート結果

次稿[23)]で詳しく記すが、高等学校における新課程では確率分布と統計処理が重点的に組み込まれている。2011 年度から順次実施された現在の高校数学課程での新学習指導要領における確率統計またはデータ解析に関する内容は、表 1 のようになっている。

表 1 高校課程での確率統計関連分野

数学分類	内容
数学 I	集合と命題、データの分析
数学 A	場合の数と確率
数学 B	確率分布と統計的な推測

数学 I の中に「データ解析」が必修化され、旧課程の数学 A に組み込まれていた「集合と論理」も数学 I で学習するようになり、さらに、旧課程の数学 C に入っていた「条件付き確率」も数学 A で習うようになって、授業の内容が増えたといえる。これは、小学校から中学校、高校 1 年生までにすべての生徒が統計教育を受ける形になっている新学習指導要領の一環でもある。これまでの微積分を頂点とした代数学が中心だった高校数学から、統計や確率といった離散数学の理解が求められる時代にシフトした構成と言える。データの分析などの重要性が強調されたこの流れは、歯科教育におけるコアカリキュラムの情報科学の「統計の基礎」、「統計手法の適応」という項目にも対応している。これらについても次稿[23)]を参照されたい。

医学・歯学系学部の入学者は、卒業年度や入学試験での選択科目のばらつきが他学部に比べて大きい傾向がある。そのため、確率・統計に関する基礎知識にも大きなばらつきの存在が見込まれる。これを check するため、高校課程での確率統計分野の用語について講義前に表 2 の用語についてのアンケートに回答してもらい、その後にこれらの項目の説明をした。

[5] 生物学では遺伝学のところで、オスの三毛猫が非常に少ないことは有名であるが、これとて、クラインフェルター症候群としての説明があるが正確には不明な点も多い。

[6] 「地道に毎日買うパンの重さを測ることでパン屋のインチキを見抜いた天才数学者ポアンカレ」の話もある。また、統計解析者が関係したノバルティスファーマのディオバン事件は記憶に新しい。

表 2　高校課程での確率統計分野の用語についての確認項目。各用語について、次の中から番号で記せ。1、聞いたこともない。2、聞いたことはあるが忘れた。3、自信はないが大体わかっている。4、知っている。説明できる。

数学 I	(A)中央値、(B)平均値、(C)分散、(D)期待値、(E)四分位偏差、(F)箱ひげ図、(G)ドモルガンの法則、(H)和集合
数学 A	(I)順列（*nPr*）、(J)組み合わせ(*nCr*)、(K)場合の数、(L)和事象の確率、(M)独立事象の確率、(N)条件付け確率
数学 B	(O)確率分布、(P)二項分布、(Q)正規分布（ガウス分布）(R)母集団、(S)母平均、(T)復元抽出

アンケートの結果を表 3 に示す。よくわかっているものは、数学 I の内容の「中央値」「平均値」、数学 A の内容の「順列」「組み合わせ」「場合の数」である。新課程の数学 B の内容については「聞いたこともない」という回答が多い。本学入試で数学を選択して入学する場合でも、「数学 I、数学 A」が範囲のためそれ以外は身についていない入学者が多いことを表しているとわかる。

表 3　上記の表 2 のアンケート結果(全人数は 82 人)。数字は人数を表示。

用語	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
回答 1	19	8	17	10	23	21	10	18	5	7
回答 2	8	13	26	33	23	13	43	33	17	14
回答 3	25	22	28	19	24	27	17	19	35	36
回答 4	30	39	11	20	12	21	12	12	25	25
用語	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
回答 1	2	17	18	12	35	45	55	38	62	66
回答 2	21	29	29	25	30	28	23	24	16	12
回答 3	36	26	24	38	14	5	4	10	2	2
回答 4	23	10	11	7	3	4	0	10	2	2

また、以下の囲みの問いに答えてもらっている。

> 問 1　「1.1.2.2.2.3.3.3.3.4」の数字を記した 10 枚のカードがある。この 10 枚のカードを母集団、カードの数字を変量とするとき、母平均、母標準偏差をもとめよ。
>
> 問 2　白玉 4 個、赤玉 3 個が入っている袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき、2 個の玉が同じ色である確率を求めよ。[数学 A:和事象の確率]
>
> 問 3　このクラス(約 90 人)の中に同じ誕生日の人は何人いるか。（直感での回答でもよい。）[誕生日問題]
>
> 問 4　確率・統計に関する現象で興味深いものは何か。

問 1、問 2 は高校 1 年の教科書「数学 I、数学 A」にある問いである。

問 1 で平均と標準偏差の意味と計算が具体的にできるのかを check すると、どちらもできたものが 3 人、平均のみできたものが 22 人であった。数学 A の教科書の例題にある程度の問 2 の正答数は、47 人と多かった。さらに問 3 の「誕生日問題」は、計算なしの直感で想像するより多くの同じ誕生日の人がクラスの中にいることを実感するためのものである。1 組から 4 組という回答が 2 人ずつ、1 組以下で小さな数字になるが 5 人、それ以外は白紙の回答であった。回答したものも多くは計算なしの直感であるが、1 人の回答は計算式も正しかった。一般に、n 人の集団で同じ誕生日の人が少なくとも 2 人以上いる確率 $P(n)$は、

$$P(n) = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!} \qquad (1)$$

で与えられる。従って $P(23) \simeq 0.5073$ となり、少なくとも 23 人集まれば同じ誕生日の人が 2 人以上いる確率は 1/2 を超え、80 人でその確率はほぼ 1 になる。

卒業年度の違う旧課程履修者の入学は今後もしばらく続くと思われるため、高校課程の微積から確率統計への移行現象の影響などを継続的に注視していく必要がある。

3　サイコロ実験

コンピュータを用いて作成した乱数は、実際には非常に長い周期を持つ数列であり、厳密な意味での乱数ではなく擬似乱数である[7]。従って、計算機を使っても coin tossing のような乱数列を作成することはできない。π の小数点以下を、奇数を“0”、偶数を“1”に変換したものは非常に良い乱数列になることが知られているが、このような例は稀である。

このことを実感し、確率統計の意味を考えるための導入部として、講義において学生に各自サイコロを持参してもらい次のような実験を行っている[25) 26)]。全員が参加できる方法で、数学や統計物理学でアプリオリに前提とする「確率」「ランダム」「独立」とは何か、加えて「人はランダム数列を産出できるか」という問題を考えさせることが主な目的である。

サイコロ実験:(A)ノートに 1 から 6 までの数字をランダムに 200 個書いてください。次に、(B)サイコロを 200 回振り、結果を書いてください。（実際には口頭で(A)を実行してもらった後に(B)をやることを告げて行ってもらう。心理学などではもっと緻密な設定で行う実験である。）

結果を表 4 のように整理し、隣の数との階差などを計算し解析してもらう。

表 4　人工的に生成したサイコロ出目 A_N と (B)実際のサイコロの出目 B_N

事象(N)	1	2	3	4	5	….	….	199	200
A_N(人工)	1	5	3	5	4	….	….	2	2
階差	-	4	-2	2	-1	….	….	-1	0
B_N(サイコロ)	4	3	1	2	3	….	….	1	1
階差	-	-1	-2	1	1	….	….	-1	0

実際の理想的サイコロでの階差Δ_nの分布は、

$$P(\Delta_n) = C(6 - |\Delta_n|) \qquad (2)$$

となる。C は規格化定数とする。一方、頭の中で想像してサイコロの目を書いても連鎖の回避や順序反応が多く出ることが、この簡単な例でもわかる。

[7]松本-西村の Mersenne Twister (MT) の性能は$2^{19937} - 1$という周期と 623 次元の均等分布を達成し非常に優秀な疑似乱数である[24)]。

また、実サイコロによる出目の分布ですらサイコロの構造の物理的な癖や振り方による個人レベルの癖などが結果に混入するので、必ずしも大数の法則や中心極限定理がうまく働くとは限らないという現実を学ぶことができる[27) 28)]。

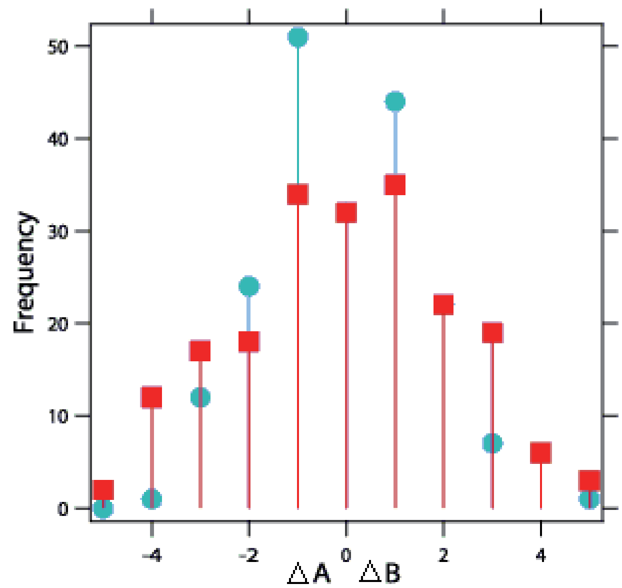

図 1　サイコロ実験結果による階差の表示。200 回の試行での結果。赤四角は実際のサイコロ、青丸は頭の中で想像しての結果。ここでは、サイコロの代わりに Microsoft Excel の疑似乱数を使った。

4　生物学系・医療系での例

アンケート(I),(II),(III)で見る限り、数学や物理学が苦手だったり拒否反応を持つ学生が多いことがわかる[2) 3) 4)]。授業では、生物学や医療で使われる具体例でその有用性やおもしろさを実感してもらうことを目的に、様々な確率・統計の使用例を紹介している。

以下に、「自然現象の数学」の講義の中で取り挙げている確率・統計の使用例を列挙しておく。

(1) シンプソンのパラドックス
(2) 検査精度と偽陽性
(3) ギャンブラー破産問題
(4) お見合い問題（最適停止理論）
(5) 三囚人問題（主観的確率）
(6) 新記録が出続ける確率

ここでは、医療系での使用例の(1)シンプソンのパ

ラドックス(プラシーボ効果）と(2)検査精度(偽陽性)を簡単に説明し、他の例は付録に与えた。

シンプソンのパラドックス:「ある集合・集団における統計的な結果が、その集団・集合を分析した場合の結果と一致しない」ことがある。表5および表6の場合の新薬の旧薬に対する生存率の優位性を考えてみる。

表5　新薬と旧薬の死生数とオッズ。オッズ（= *p/(1 −p)*）は、生存率 *p* を使い定義される。

	死亡	生存	オッズ
旧薬	600	500	0.83
新薬	900	100	0.11

オッズ比(=新薬のオッズ/旧薬のオッズ）は0.13(=0.11/0.83)となり、新薬の方が圧倒的に死亡しやすいということになるが、しかし、性別を導入し変数を増やしより細かな表6を書いてみると新薬のオッズ比が変化する。

表6　新薬と旧薬の死生数とオッズ2

	女死亡	女生存	男死亡	男生存
旧薬	100	5	500	495
新薬	890	88	10	12

この場合、女の場合新薬生存のオッズ比は
1.98(=(88/890)/(5/100) = (88×100)/(890×5))、
男の場合のそれは
1.21(=(12/10)/(495/500) = (12×500)/(10×495))
となる。男女の区別なくデータを見たときは新薬が不利だったのが、男女別にすると新薬が有利になるため、パラドックスと呼ばれている。プラシーボ効果の検証などにもこのパラドックスは十分注意しておかねばならない現象である。

検査精度と偽陽性: そのウイルスに一度感染すれば、ほぼ間違いなく発病し、治癒の方法はなく死を迎えるだけの感染症があるとする。日本では、1万人に1人がウイルスのキャリア(D)と予測され、検査の現在の精度は 99.9%（99.9%の精度でキャリア(D)かそうでないか(D^c)を見分けることが可能という非常に高精度のもの）とする。この検査で「陽性(+)」と結果が出た場合にあなたは悲観的になるか？

条件付き確率やベイズの定理を利用する。
$P(D) = 0.0001,\quad P(D^c) = 0.999$であり、
$P(+|D) = 0.999,\quad P(+|D^c) = 1 - P(+|D)$であり、
$P(-|D^c) = 0.999$である。このとき、陽性(+)となる確率 $P(+)$は、

$$P(+) = P(+|D)P(D) + P(+|D^c)P(D^c) \tag{3}$$
$$= 0.0010998 \tag{4}$$

となり、1万人で約11人が陽性となる。すなわち、この11人中の約10人は偽陽性だとわかる。また、ベイズの定理を利用し

$$P(D|+) = \frac{P(+|D)P(D)}{P(+)} \tag{5}$$
$$= \frac{0.999 \times 0.0001}{0.0010998} \tag{6}$$
$$= 0.0908\ldots \tag{7}$$

となり、陽性と出た人の約9%が感染しているともいえる。悲観せず再検査をすればいい。

5　まとめ

歯科医師国家試験では、疫学の感染症などに関し、確率や統計学の基礎的知識が必要である。しかし、現代の社会生活では、単純なデータ解析のような技術的なことのみならず、原発事故のような稀な災害や事故などに対する備えをどう捉えるかといった、リスク評価においてもそれらの知識が必要とされる[29) 30)]。これらは、決して専門家の知識で解決する問題ではなく、専門家の間ですら意見が正反対に分かれることもしばしばである。そのためにも思考の「種」となる基礎教育が重要であり、これが大学での教育ではないだろうか。大きな意思決定の必要に迫られたり、当たり前の哲学的な疑問に出会ったりしたときのためにも、教養教育で耕された土壌に蒔かれた「種」は、自然環境の中の適切な場所で適切な時期に自ずと生育することが期待できる[8]。

[8]民主主義も大学も接ぎ木のようでは本物は育たない。生育に時間がかかるからと、これまでの梨の木（幸水、二十世紀）を切ってそこにルレクチェを接ぎ木し、市場の人気に応えるという安易なことでよいのであろうか。

A その他の例について

4 節の確率・統計問題を列挙しておく。結果の説明は様々な解説書を参照されたい。

ギャンブラー破産問題：ギャンブルで m 円を $N(>m)$円に増やしたい。一回に 1 円ずつ賭けてその勝つ確率が p、負ける確率が $q(=1-p)$ とする。達成する確率はどうか。

この目標達成する確率 $P(m,N)$は、漸化式
$P(m,N) = pP(m+1,N) + qP(m-1,N)$
と状態$P(0,N) = 1, P(N,N) = 1$から

$$P(m,N) = \frac{(q/p)^m - 1}{(q/p)^N - 1} \tag{8}$$

で与えられる。もし、$p = 0.48$、$q = 0.52$ (米国ルーレットはこれに近い)ならば、$P(50,100) = 0.0025$ となり、400 人に一人しか持ち金を倍にすることができず、他の 399 人は破産することになる。

最適停止理論（お見合い問題、秘書問題）：$n(=20)$人の異性と順番にお見合いをし、各お見合いの直後に Yes/No の返事をしなければならない。Yes の返事をしたらその相手と結婚しなければならず、次の相手とのお見合いはできない。なるべく好みの相手と結婚するにはどうすればよいか。

（A）一番好みの相手との結婚のみを狙うならば、1 人目から n/e 人目（今の場合は 7 人目）まではいくら好みでも我慢して No を続け順位を記録するのみにする。$n/e+1$ 人目（今の場合は 8 人目）からは、それまでで一番良ければ Yes とする。

このとき、$n\to\infty$なら 1 位の相手と結婚する確率は 1/e=0.3678794 に収束する。

また、(B）選んだ相手の順位の期待値を最小にしたい場合の最適戦略は、「1～5 人目では我慢して No. 6～10 人目ではそれまでの 1 位なら Yes。11～13 人目ではそれまでの 2 位以内なら Yes。4. 14～15 人目ではそれまでの 3 位以内なら Yes。5. 16 人目ではそれまでの 4 位以内なら Yes。6. 17 人目ではそれまでの 5 位以内なら Yes。7. 18 人目ではそれまでの 7 位以内なら Yes。8. 19 人目ではそれまでの 10 位以内なら Yes。9. 20 人目では仕方なく Yes」であり、このとき、選ぶ相手の順位の期待値= 3.0017 となる。しかし、この戦略をお見合いで利用しようとする場合には注意が要る。上記は相手を一方的に選べる場合の話であり、自分が相手に選ばれるとは限らないからである。そして、実際には相手も戦略があるかもしれないし、あるいはお見合いにこんな戦略が念頭にある人を選びたくないかもしれない。

三囚人問題（主観的確率、モンティ・ホール問題）：3 人の死刑囚、A，B，C がいて、このうち 1 人だけが恩赦になったが、誰がなったのかを囚人は知らない。囚人 A が、看守に「B と C のどちら 1 人は必ず死刑なのだから、処刑される人を 1 人だけ教えてください」と願い出て、看守は「B が処刑される」と教えた。このとき、囚人 A は自分の死ぬ確率は小さくなったと喜んだ。これは、妥当かどうか。

かなり前の理論生物学の国際会議でも、参加者が夢中になりすぎて本題がおろそかになったという有名な問題でもある [31)]。囚人 A は自分が死刑になる確率が 2/3 から 1/2 と小さくなったと喜んだわけだが、「確率」とは何かをも考えさせられる。これは、認知心理学とも関連し、有名なモンモール問題とも共通の構造を持っている。

2016 年がオリンピックイヤーなので、ついでに次の問題も挙げておく。タイ記録を含む場合の数学的説明については、文献 [32)]を参照されたい。

新記録問題：スポーツの最高記録は永遠に出続けるであろうか。事実、陸上競技や水泳競技での世界新記録がオリンピックや世界選手権ではよく出ている。では、人類の運動能力は年々向上しているのか？　または、人類の運動能力が変わらないとしても、これらの世界記録は更新され続けるのであろうか。

B　条件付き確率とベイズの定理

事象 B が生じた条件下で事象 A が生じる確率を $P(A|B)$と書く。これは、

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad (9)$$

と表せる。すなわち、$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)$また、A と B を入れ替えて $P(A\cap B)=P(B|A)P(A)$である。このことから、$P(A|B)$を $P(B|A)$であらわせる。

さらに、事象 C も混在するとして、

$$P(A\cap B\cap C) = P(A|B\cap C)P(B|C)P(C) \qquad (10)$$

と事象の生起確率の chain rule が成立する。もちろん、A,B,C は入れ替えてもよいし、全事象が独立ならば、$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$となる。

謝辞

講義を聴講し、アンケートに回答してくれた学生に感謝します。アンケート項目のいくつかは既に講義の内容や進め方の改善に利用していますが、さらにより魅力ある講義にしていきたいと思っています。また、本稿の掲載に関してご面倒をおかけした、本誌編集員の方々に感謝します。

参考文献

1) 山田弘明. 「自然現象の数学」準備中.
2) 山田弘明, 山下陽介, 小野裕明. 「アンケートを通してみる学生の状況:「自然現象の数学」に関して」 日本歯科大学紀要(一般教育系), 43 巻(2014), 7-16（アンケート(I)として引用).
3) 山田弘明, 山下陽介, 小野裕明. 「アンケートを通してみる学生の状況(II):「自然現象の数学」に関して」 日本歯科大学紀要(一般教育系), 43 巻(2014), 17-25（アンケート(II) として引用).
4) 山田弘明, 山下陽介, 小野裕明. 「アンケートを通してみる学生の状況(III):「自然現象の数学」に関して」 日本歯科大学紀要(一般教育系), 44 巻(2015), 1-10（アンケート(III) として引用).
5) 「統計でみる日本」 日本統計協会 2015.
6) Alan Fersht, The most influential journals:Impact Factor and Eigenfactor, PNAS April28, 106, 6883-6884(2009).
7) ダレル・ハフ. 「統計でウソをつく方—数式を使わない統計学入門」 講談社 1968.
8) 谷岡一郎. 「確率・統計であばくギャンブルのからくり」講談社 2001.
9) S.Senn. 「確率と統計のパラドックス」 青土社 2004.
10) 人はなぜ確率に弱いのか Newton, 84—89,2008 4 月号.
11) 中原英臣, 佐川峻.「数字のウソを見破る」 PHP 新書 2010.
12) 神永正博. 「ウソを見破る統計学—退屈させない統計入門」 (ブルーバックス) 講談社 2011.
13) Newton Special 「情勢判断・意思決定の数学　統計の威力」 ニュートンプレス 2013 年 12 月号.
14) 西内啓. 「統計学が最強の学問である」 ダイヤモンド社 2013.
15) 西内啓. ダイヤモンド社 2014.
16) 廣瀬英雄. 「実例で学ぶ確率・統計」 日本評論社 2014.
17) 岩沢宏和. 「世界を変えた確率と統計のからくり 134 話」 SB クリエイティブ 2014.
18) 大栗博司.「数学の言葉で世界をみたら」幻冬舎 2015.
19) Science Window 2015 年冬号（1-3 月）第 8 巻 4 号［特集：なぜ数学をまなぶの？］ http://sciencewindow.jst.go.jp/html/sw57/nav.
20) 梶谷通稔. 「連載　あなたはビルゲイツの試験に受かる?」 URL:http://www.arp-nt.co.jp/rensai/backnumber.html
21) マーク・ブキャナン. 「市場は物理法則で動く—経済学は物理学によってどう生まれ変わるのか？」 白揚社 2015.
22) 大平徹. 「「ゆらぎ」と「遅れ」: 不確実さの数理学」 新潮選書 2015.
23) 山田弘明, 山下陽介, 小野裕明 「歯科基礎系教育(数学関連) と大学入試」 日本歯科大学紀要(一般教育系), 45 巻(2015). （次稿として引用)
24) Matsumoto, M., and Nishimura, T. Mersenne Twister: A 623-dimensionallyequidis- tributed uniform pseudorandom number generator. ACM Transactions on Modeling and Computer Simulations 8 (1998), 330.
25) 本田仁視. 「人はランダム数列を産出できるか」、平成12 年度「複雑系のダイナミックスとその認知的創発性」新潟大学学際プロジェクト研究報告書 p55-61. 2002.
26) 鳥居寛之. 「物理実験のための統計学サイコロ実習」 大学の物理教育, 15, 77-81, 2009.
27) 赤摂也. 「確率論入門」培風館 1958.
28) 福島正俊, 石井一成. 「自然現象と確率過程」〔増補版〕版 日本評論社 1996.
29) 古澤, 中島, 本堂. 「科学技術の不定性と社会的意思決定」科学 82, 0788-0795, 2012.
30) 牧野淳一郎. 「原発事故と科学的方法」(岩波科学ライブラリー) 岩波書店 2013.
31) Maynard Smith, Mathematical Ideas in Biology, Cambridge, 1971.
32) 芳沢光雄. 「新体系・高校数学の教科書　下巻」 講談社ブルーバックス 講談社 2010.