日本歯科大学紀要　第 44 巻　11-19 頁，2015，3 月　DOI: 10.14983/00000737

学生アンケートによる黄金比に関する感覚
Sence of Students for Golden Ratio

新潟大学工学部　山田弘明 [1]
新潟生命歯学部　山下陽介
新潟生命歯学部　小野裕明

Yamada Physics Research Laboratory　Hiroaki YAMADA
The Nippon Dental University　Yousuke YAMASHITA
The Nippon Dental University　Hiroaki ONO

(2014 年 11 月 11 日受理)

abstract

一年生向け講義「自然現象の数学」の一部で Fibonaaci 数列の講義の導入部に行ったアンケートの結果の紹介をすることが本稿の主な目的である。

Keywords: Mathematics, students, lecture, questionnarie, senses, golden ratio

1　はじめに

2010 年度より日本歯科大学新潟生命歯学部の一年生向け講義「自然現象の数学」を担当している [2]。その内容の一部として、等差数列、等比数列を学んだ後にフィボナッチ数列 ($F_0 = F_1 = 1$ とし、n 番目のフィボナッチ数を F_n と表示する) と黄金比 (ϕ と表示する) を学ぶ。その講義の初めの 5 分間で黄金比の感覚に関するアンケートを行い、その結果を学生にも紹介している。このアンケートは、数学が苦手で分からなくとも、各自が講義内容に参加することで数学への興味を誘起する目的がある。また、何も意識しなければ見落としがちな身のまわりに、良く観ればフィボナッチ数や黄金比がいくらでも入り込んでいることを実感してもらうことに加え、無理数と有理数の違いを再認識してもらうこともこの講義の目的である。さらに、美的感覚という点では審美歯科などで歯科医にとっても重要な要素の一つになる可能性がある[1]。

黄金比と無理数について、ユークリッドの互除法による説明を付録に記した。

2　黄金比アンケート

フィボナッチ数列の講義の導入時に、アンケートの目的などは告げずに直観的に回答してもらった、アンケートの内容のを図 1 に示す [3]。どのような比率の図形を好む傾向があるか調べるため、黄金比の図形を含めた中から好きなものを選択し

[1] もちろん、基本的人間性や誠実さが何よりも重要な要素であろう。

てもらう形式である。問1では、図Aの縦横比が黄金比（黄金四角形）、問2では、図Bの大きな丸と小さな丸の半径比が黄金比である。問3は、いずれも正五角形から切りだした三つのタイプの二等辺三角形であり、図Aが黄金三角形である。正５角形は、正5/2角形と対になり無限構造を形成する。これについては次節で改めて言及する。

問4では、線分 AB の長さを1とし、分割点を C とした場合、$AC : CB = AB : AC$ を満たす線分 AC の長さが黄金比になる。さらに、問5について、日本のアニメのキャラクターは人気が出るに従って丸くなり、その縦横比が白銀比に近づく傾向がると言われており [4, 5]、ドラえもんも例外ではないようである。それに関する記憶と認識を調べようとしたものである。

まず、アンケート問1-問3の回答結果を表1に示す。問1では、黄金比長方形よりも正方形が多く選ばれている。また、白銀比 (1:1.4) の長方形が黄金比長方形と同程度に選ばれていることにも注目すべきである[2]。一般に、日本人の間では黄金比より白銀比が好かれる傾向は、建築物や絵画などでも知られている [6]。問2の回答に関しても、黄金比と同程度に白銀比の図が選ばれている。問3に関しては、比較的正三角形に近い図Bが選ばれている。

表 1: 2014年度における黄金比アンケートの問1-問3に対する (62人の) 回答結果

	A	B	C	D
問1	11	41	1	9
問2	12	25	20	5
問3	28	34	0	—

図2は、問4と問5に対する結果を比率1-2の間のヒストグラムとして示したものである。問4は1:1.6という黄金比に分割するかどうかの興味であったが、かなり二等分点を選ぶ傾向がある。次いで、1:2の分割であり、黄金比や白銀比は小数派となっている。問5のドラえもんに関しては、多くの人がやや縦長という点では共通だが、どちらかと言えば、黄金比より白銀比よりの人数が多いという結果である[3]。

最後に、個人により対称な分割を好み人や、黄金比分割を好む人、白銀比分割を好む人に分かれる可能性もあるため、問1-問2-問3の連動した選択の様子を表2に示す。個人ごとに、等分割を好む人や黄金比を好み人が分かれている傾向がある。特に、等分割を好む人が多いが、これは問4の線分分割の結果とも無矛盾である。次いで、黄金比を好む人が多い傾向だが、正確に高次の相関を分析するにはさらにデータが必要になる。

表 2: 黄金比アンケートの問1-問3に対する (62人の) 回答結果。問1-問2-問3の選択で、B-A-B(二等分) A-B-A(黄金比), D-D(白銀比) などを選んだ人数を表示。

問1-2-3	人数
B-A-B(等比)	8
B-B-B	7
B-C-B	7
A-B-A(黄金比)	3
D-D(白銀比)	0

3　黄金比の例など

講義で用いる自然界における黄金比の例を挙げておく。物理学の中では準結晶や宇宙の中にも存在するが、ここでは生物学での例を中心に挙げる [7, 8, 9, 10, 11, 12]。

まず多くの植物の花序や葉序にみられる構造に黄金角が関連している。効率よく利用し太陽光を受ける為に理想的には黄金角 θ_g に従って花弁や葉の配列が決められることが多い。黄金角とは、円

[2] 白銀比は $1:\sqrt{2}$ であり、A4紙のサイズである。

[3] ここでは表示しないがなかなかの傑作もあった。

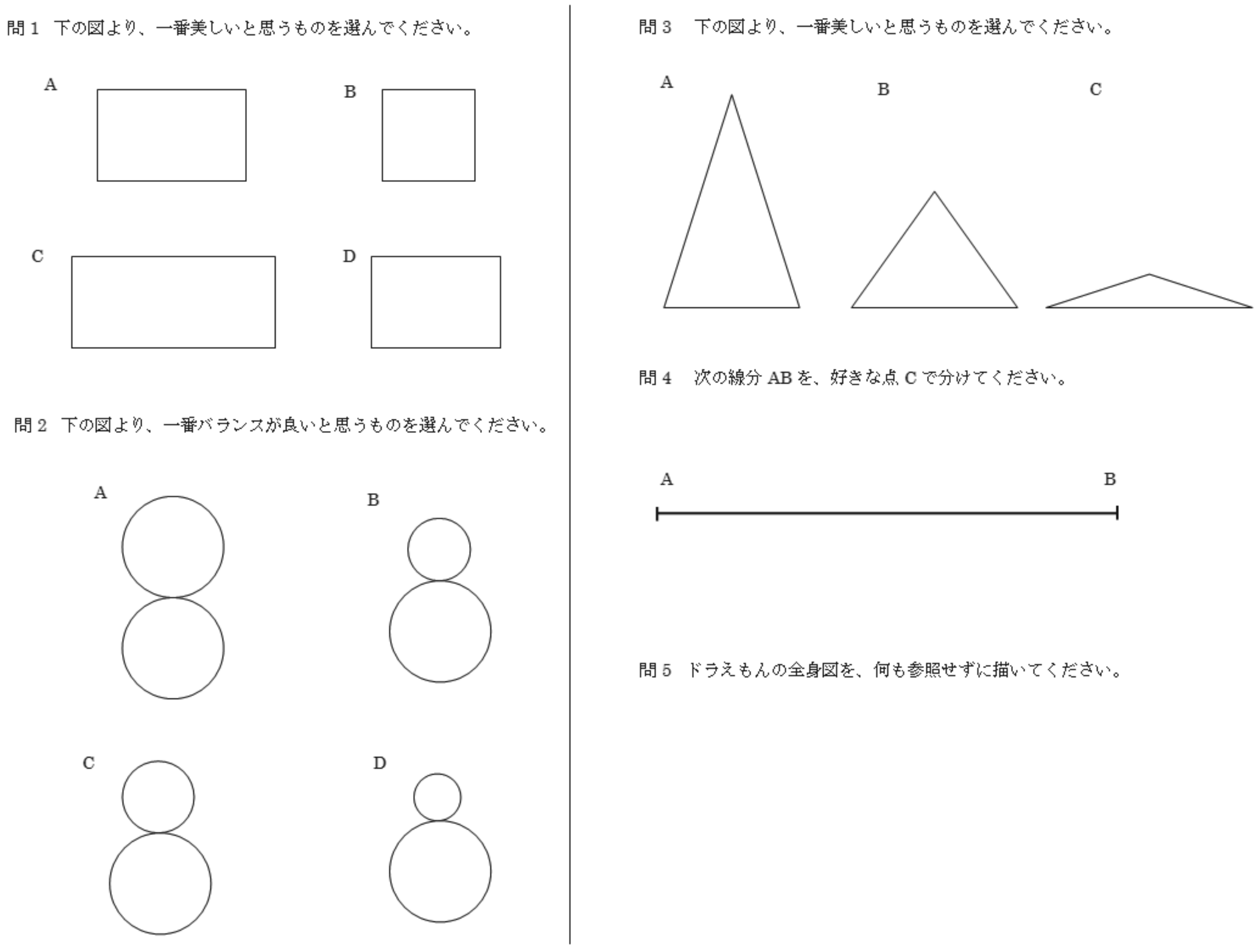


図 1: 上記の問 1-3 は文献 [3] を参考に改変したものである。問 1 の四角形では、比 (縦:横) が A(1:1.6),B(1:1), C(1:2.2), D(1:1.4) である。問 2 の 2 つの円では、各半径の比が A(1:1), B(1:1.6), C(1:1.4), D(1:2) である。問 3 の三角形は、いづれも正五角形から切りだした二等辺三角形を用いている (図 2 を参照されたい)。

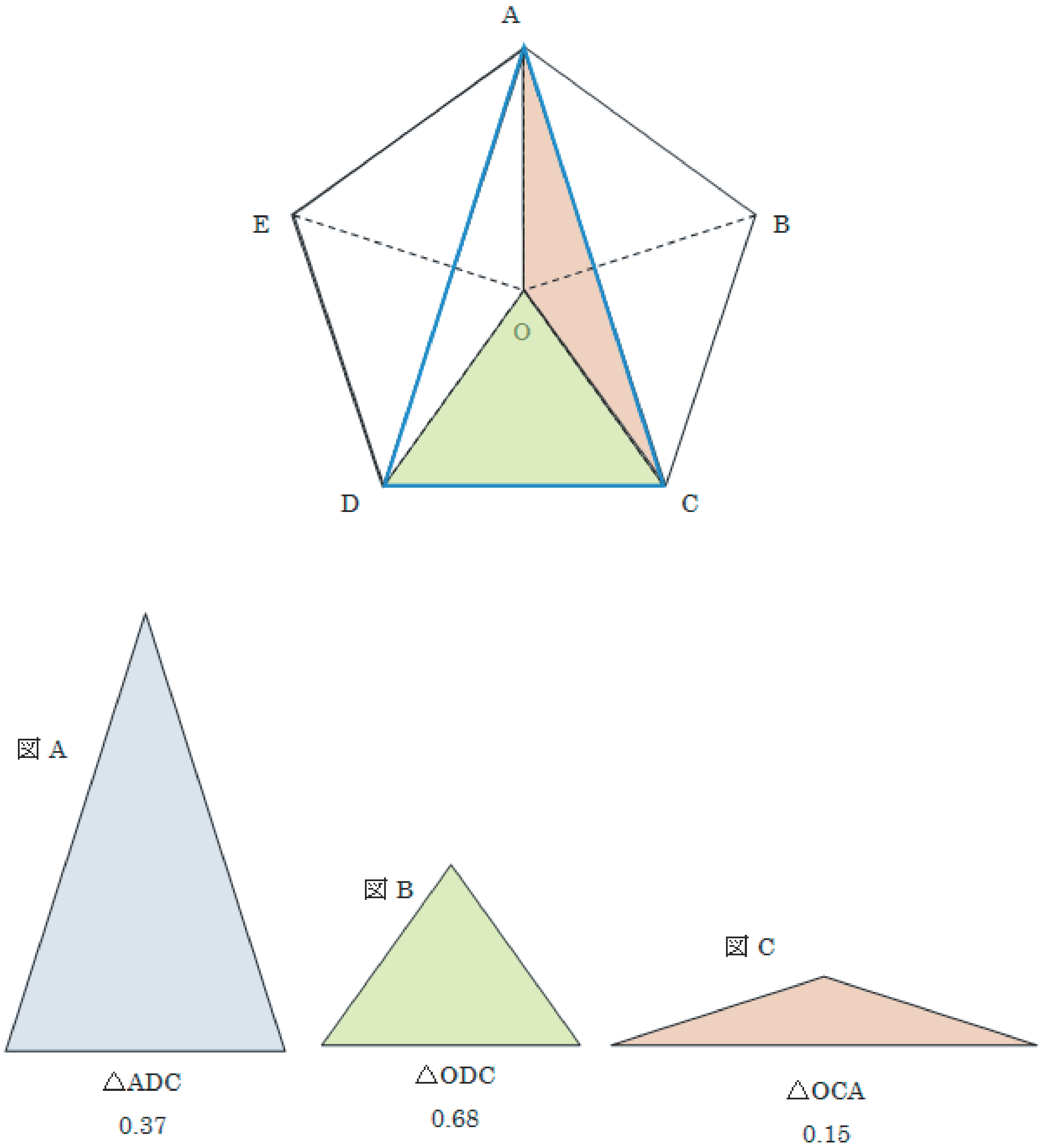
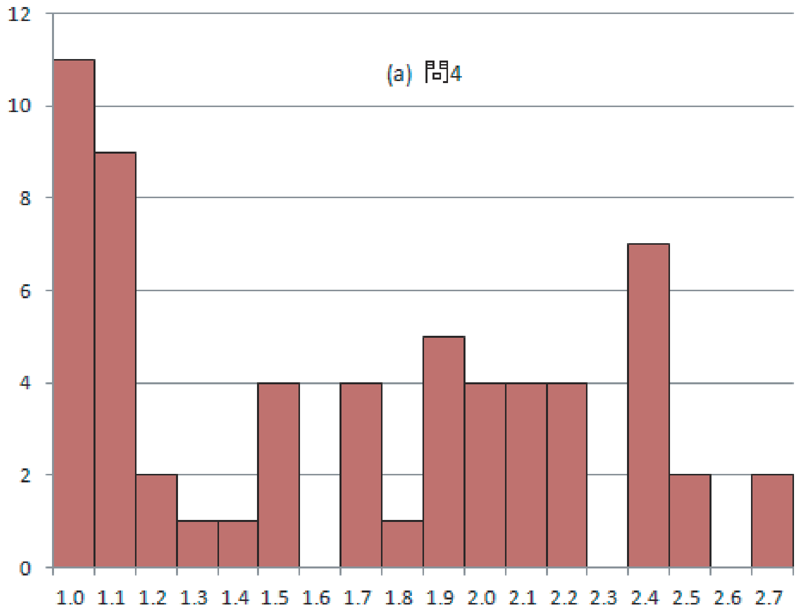


図 2: 正五角形とそこから切りだした二等辺三角形。それぞれ黄金比アンケートの問 3 の三つの二等辺三角形 A(頂角 36 度), B(頂角 72 度), C(頂角 144 度) に対応している。三角形の下の数字は三角形の底辺と高さの比を表わしている。また、これらのほかに二等辺三角形 ΔEAD も切りだせる。



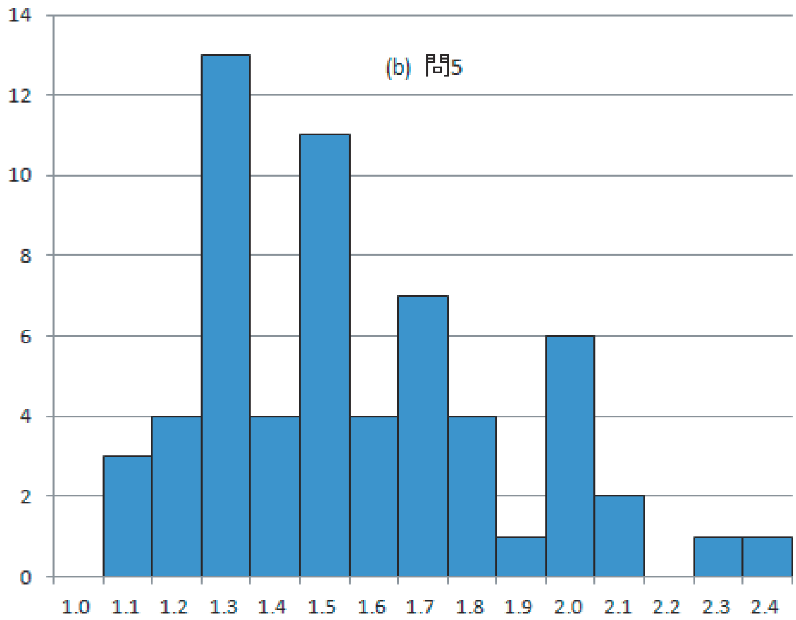


図 3: 黄金比アンケートの問 4 と問 5 に対する回答の比率のヒストグラムで表示したもの。問 4 は長い線分/短い線分の比率とし、問 5 はドラえもんを Box で囲み箱の長さの縦/横を比率とした。

周を $1:\phi$ に分割する角度であり、

$$
\begin{aligned}
\theta_g &= 2\pi\frac{1}{1+\phi} && (1)\\
&= 2\pi\frac{1}{\phi^2} && (2)\\
&\sim 137.51^\circ && (3)
\end{aligned}
$$

である。具体的には、有限性から 9 割近い植物の開度（隣り合う葉と葉のなす角度）は、

$$\theta_n = 2\pi\frac{F_{n-2}}{F_n} \qquad (4)$$

と、黄金比をフィボナッチ数 F_n の比で近似（有理近似）したもので与えられる。実際に講義では松ぼっくりを持参させ、右回り、左回りの螺旋の数を数えてもらい統計をとっているが、大きさに関係なく、5、8、13 のフィボナッチ数になっている[4]。他に、サボテン、パイナップル、ヒマワリの種の配列もフィボナッチ数になっていると言われるが、ヒマワリの種などは松ぼっくりに比べると、大きなフィボナッチ数なので乱れや分岐が入り数えにくい点がある。(図 3 の上図を参照。)

次に動物の例として、オウムガイやサザエなどの巻貝の渦巻き状の構造に観られるような、黄金比長方形を使った相似形を保ったままの成長構造を見出すことができる。(数学的には対数らせん構造のひとつである。）他に、羊の角の成長にもみられる。(図 3 の下図を参照。)

また、幾何学における例として前節でも言及したように、正 5 角形がある。正 5 角形の全ての頂点を結ぶと、その中に正 5/2 角形 (いわゆる星型の五芒星) が存在し、その五芒星の中心部分はまた正五角形となる。そして、この正五角形の中に黄金三角形 (図 2 の A) が存在し、この構造が永遠に繰り返される。また、その黄金三角形の中には様々な黄金比が存在する。

[4]大学周辺の松林は殆どクロマツである。また、時折、松ぼっくりの中に羽根のついた種も残っていることもあり、いろんな点で興味深い教材である。

4　おわりに

前稿アンケート (I)[13] でも記したが、高等学校における新科目の「数学活用」は、「数学基礎」の趣旨を生かし、その内容を更に発展させた科目として設けられた。数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学への興味や関心を高めるとともに、具体的な事象への活用を通して数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てることがねらいである [14] 。

あらゆる分野の学問においても、当たり前のことに答えることが一番難しい。「数」とは何か、「熱」とは何か、「命」とは何か、「平和」とは何か、「人生」とは何か、「自然」とは何か、「教養」とは何か、「日本人」とは何者かなど。身近であり、当たり前の様な物事に関する疑問に答えることほど困難で一朝一夕にはいかないものである。日頃から様々な物事との関わりを通して、絶えずその意味も考察しておくべきであろう。実際、本稿で取り上げたフィボナッチ数や黄金比についても身近なこととの深い関連があるように。

当たり前の疑問に出会った時のためにも、基礎教育は重要である。まさに教養教育は、土を耕し適切な場所に適切な時期に種をまいておかれた自然環境のもとで自ずと生育する作物をつくるようなものであろう。

A　黄金比・黄金角と連分数展開

ギリシャ時代，ユークリッド (Euclid) は，２つの数が割り切れるどうか調べるための方法 (アルゴリズム) を発見した。a と $b(<a)$ の２つの自然数がある。a を b で割ると、商が q で余りが r であるとする $(0<r<b)$。もし余り r がゼロなら，a は b で割り切れ，a は b の倍数 $(a=qb)$ である。もし余り r がゼロでないなら、a は b で割り切れず、$a=qb+r$ である。次に、

$$b \to a, r \to b$$

図 4: 松ぼっくりと巻貝。

と置き換えて、同じ操作を繰り返す。その商を q', 余りを r' とすると、$b = q'r + r'$ となる。つまり、

$$a/b = q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{r/r'}}}. \tag{5}$$

同じ操作を余りがゼロになるまで繰り返す。もしある繰り返しの後その余りがゼロになると，結局もとの a と b の比 (a/b) は一つの分数で表せることになる。この方法をユークリッドの互除法という。この場合，次々と現われる商の数列と最後の余りを並べて、次のように表し、これを有理数 a/b の (正則) 連分数展開という。

$$\begin{aligned} a/b &= q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{q^{(n)} + r^{(n)}/r^{(n-1)}...}}}}. \\ &\equiv [q; q', q'', ..., q^{(n)} + r^{(n)}/r^{(n-1)}]. \end{aligned} \tag{6}$$

一方，もし際限なくこのプロセスが繰り返されるとき，商の数列は,

$$[q; q', q'', ..., q^{(n)}, ...] \tag{7}$$

と続くことになる。ユークリッドは，この場合、その数を一つの無理数（割り切れない数、irrational number) であると考えた。すなわち、ユークリッドの互除法を無理数に対して適応すると無限に続く連分数展開で表現されることになる。

$x^2 = x + 1$ という 2 次方程式の解を考えてみよう。両辺を x で割ると，$x = 1 + 1/x$ となる。右辺の分母の x に右辺全体を入れると，$x = 1 + 1/(1 + 1/x)$ が得られる。どんどん同じことを繰り返すと，

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}... \tag{8}$$

と際限なく続く。明らかに、これはそれ自身のなかに自分があるという入れ子構造（階層構造）を形成している。そして、これはユークリッドの互除法の特別な場合で,

$$x = [1; 1, 1, 1, 1, ...] \tag{9}$$

となる例である。この 2 次方程式を直に解くと，その解は無理数、黄金比 ($x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) であり，最も簡単な連分数展開の例になっている。一般に、整数部を m として、

$$x = [m; a, a, a, ., ...], \tag{10}$$

$$x = [m; a, b, c, a, b, c, ...], \tag{11}$$

のように数字が周期的に永遠に続くものは、(二次方程式の解になる) 二次無理数に相当することが知られている（ラグランジュの定理)。

また、無理数の連分数展開は永遠に続くものだが、これを途中でやめると、分数なので有理数になる。その有理数で、無理数の有理数近似列をつくることができる。その意味で正則連分数展開において 1 が繰り返される黄金比は、有理数での近似が一番働かない無理数 (有理数から一番遠い無理数) なのである。黄金比や自然界における階層構造などに関してより詳しい説明は文献 [15, 16, 17] を見よ。

謝辞

講義を聴講し、アンケートに回答してくれた学生に感謝します。アンケート項目のいくつかは既に講義の内容や進め方の改善に利用していますが、さらにより魅力ある講義にしていきたいと思っています。また、本稿の掲載に関してご面倒をおかけした、本誌編集員の方々に感謝します。

参考文献

[1] 日 本 歯 科 大 学 新 潟 生 命 歯 学 部 非 常 勤 講 師「 自 然 現 象 の 数 学 」担 当 。E-mail:hyamada[at]uranus.dti.ne.jp

[2] 山田弘明、「自然現象の数学」準備中.

[3] 角間洋、平島雅彦、長谷川瞳、穂高夏樹「黄金比は本当に美しいものなのか」長野県木曽青峰高等学校 理数科　平成 20 年度課題研究.

[4] 牟田淳「日本人の好きな形における比率の研究」, 東京工芸大学芸術学部紀要「芸術世界」**16**, 45-54(2010).

[5] 牟田淳「「美しい顔」とはどんな顔か」 (化学同人 2013).

[6] 江藤邦彦「法隆寺にひそむ白銀比、五稜郭に潜む黄金比」(ベレ出版 2009).

[7] 佐藤修一「自然にひそむ数学」(講談社 1998).

[8] 上村文隆 「生き物たちのエレガントな数学」(技術評論社 2007).

[9] 「黄金比 ϕ の謎」Newton 2010 年 6 月号、76-91.

[10] 有田重彦、大塚泰介、戸田孝「珪藻の殻に現れたベルヌーイ螺旋」数学セミナー **591**, 54-57(2010).

[11] 東川和夫「ひまわりのたね」数学セミナー **7**, 34-41(1985).

[12] 日詰明男　「黄金比の数理的造形　フィボナッチ・タワー (1)」じっきょう **53,54** - 実教出版 (2006).

[13] 山田弘明、山下陽介、小野裕明「アンケートを通してみる学生の状況:「自然現象の数学」に関して」日本歯科大学紀要 (一般教育系), **43**, 7-16(2014)（アンケート (I) として引用している).

[14] 数学活用［新課程用］(啓林館 2012).

[15] Scott Olsen(藤田 訳) 「黄金比 (アルケミスト双書)」(創元社 2009).

[16] マンフレッド. シュレーダー (竹迫一雄 訳)「フラクタル・カオス・パワー則—はてなし世界からの覚え書」(森北出版 1996).

[17] 岩崎浩、上越数学教育研究 **18**, 23-30(2003).