共変式の環と半不変式の環の同型性　VI

Isomorphism between Covariant Ring and Semi-invariant Ring VI

新潟生命歯学部　桜岡　　充

Mitsuru SAKURAOKA

The Nippon Dental University, Hamaura-cho 1-8.

Niigata 951-8580, Japan

(2008年11月20日受理)

Abstract

We study relationships between the semi-invariant and it's automorphic form, then we analyze the series of differential equations which make constraints on the automorphic forms. In this time we take note of the single variable automorphic form (Fuchsian function) which plays important role in studying the arithmetic of algebraic nummber fields. We argue also asymptotic problem on the element of automorphic form.

Key Words : isomorphism, Lie ring, transvectant.

Sec 10　保型形式と保型関数体

ここで，GL(2, R)の要素 α に対して上半平面U上の零点を持たない正則関数 $\phi(\alpha, \xi)=\alpha_{21}\xi+\alpha_{22}$ を導入する．このとき

$$\begin{aligned}
&\phi(\alpha\beta, \xi)=\phi(\alpha, \beta\xi)\cdot\phi(\beta, \xi),\\
&\phi(\alpha, \xi)=1/\phi(\alpha, \alpha^{-1}\xi),\\
&d(\alpha\xi)/d\xi=\det(\alpha)/[\phi(\alpha, \xi)]^2, \qquad (1)\\
&\mathrm{Im}(\alpha\xi)=\mathrm{Im}(\xi)\cdot\det(\alpha)/|\phi(\alpha, \xi)|^2,\\
&\phi(\alpha, \xi)/\phi(\beta, \xi)=\mathrm{const.} \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1}\in GL(2, R)
\end{aligned}$$

である．ところで，ある整数mに対して，U上の任意関数についてのGL(2, R)の要素 α の作用は

$$\{f|[\alpha]_m\}(\xi)=\det(\alpha)^{\frac{m}{2}}\phi(\alpha, \xi)^{-m}f(\alpha\xi) \quad (\xi\in U) \qquad (2)$$

で与えられる．よって，(1)よりただちに，$f|[\alpha\beta]_m=(f|[\alpha]_m)|[\beta]_m(\alpha, \beta\in GL(2, R))$が成り立つことが分かる．(2)で α がスカラー要素である場合は

$$f\left|\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right.=f\ (a>0),\quad f\left|\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right.=(-1)^m f$$

である．Γ がFuchs群であるとき，mを整数として，U上の有利型関数 $f(\xi)$ が Γ の任意の要素 γ に対して $f|[\gamma]_m=f$ をみたすなら $f(\xi)$ は Γ に関するweight mの保型形式(weight mの Γ-保型形式)となる．weight mの Γ-保型形式全体を $D_m(\Gamma)$ で表そう．もちろん $D_m(\Gamma)$ は C 上のベクトル空間であり

$$\begin{aligned}
&\Gamma\supset\Gamma' \Rightarrow D_m(\Gamma)\subset D_m(\Gamma'),\\
&f\in D_m(\Gamma),\ g\in D_n(\Gamma) \Rightarrow fg\in D_{m+n}(\Gamma), \qquad (3)\\
&f\in D_m(\Gamma),\ \alpha\in GL(2, R)\\
&\quad\Rightarrow f|[\alpha]_m\in D_m(\alpha^{-1}\Gamma\alpha)
\end{aligned}$$

である．第1種のFuchs群 Γ において，$D_m(\Gamma)$ (m：整数)により生成される加群：

$$D(\Gamma)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}D_m(\Gamma)$$

は環をなすことは(3)より明らかである．次に Γ の要素 α，β について $\phi(\alpha, \xi)=\phi(\beta, \xi)\Leftrightarrow\alpha\beta^{-1}\in\Gamma_\infty$ である．いま，Γ/U の測度 $v(\Gamma/U)$ は有限であり，Γ_∞/U の測度は有限ではないので Γ_∞/Γ は無限集合になる．よって Γ の要素の列 $\{\gamma_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ としてk≠hのとき $\phi(\gamma_k, \xi)\neq\phi(\gamma_h, \xi)$ となるように選べる．こうしたとき，$f_m\in D_m(\Gamma)$ $(M\leqq m\leqq N)$ が

$$\sum_{m=M}^{N} f_m = 0 \tag{4}$$

なる関係を満たすとすると，任意整数 k に対して

$$\sum_{m=M}^{N} f_m(\gamma_k\xi) = \sum_{m=M}^{N} \phi(\gamma_k,\ \xi)^m f_k(\xi) = 0$$

が成り立つ．この関係式は $f_m(\xi)$ $(M \leqq m \leqq N)$ についての U 上の有理型関数を係数に持つ1次方程式であるが，k が $M \leqq m \leqq N$ の範囲で動く時，これら $(N-M)$ 個の式は $f_m(\xi)$ $(M \leqq m \leqq N)$ に関する斉次連立方程式に他ならない．この係数行列の行列式は

$$\det[\phi(\gamma_k,\ \xi)^m] = \prod_{k=M}^{N} \phi(\gamma_k,\ \xi)^M \cdot \prod_{k<h} \{\phi(\gamma_k\xi) - \phi(\gamma_h\xi)\}$$

で与えられる．これは U 上で恒等的に零ではない正則関数であるから

$$f_k = 0 \qquad (M \leqq m \leqq N) \tag{5}$$

である．つまり，$D(\Gamma)$ は次元付きの環なのである．つぎに，Γ が放物的尖点 cusp$a$ をもつ場合について $SL(2,\ R)$ の要素 μ を $\mu a = \infty$ であるようにとると，正数 ε が存在して

$$\mu\Gamma_a\mu^{-1} \cdot \{\pm 1\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & k\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| k \in Z \right\} \tag{6}$$

とできる．$f(\xi)$ が $D_m(\Gamma)$ の要素であるならば $f|[\mu^{-1}]_m \in D_m(\mu\Gamma\mu^{-1})$ であるから m は偶数であるように選べる．このとき，$(f|[\mu^{-1}]_m)|\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f|[\mu^{-1}]_m$ が成立するので

$$(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi+\varepsilon) = (f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)$$

となる．よって S を原点 O を中心とする単位円盤とすれば S-{O}上の関数 $g(\xi)$ が定義できて

$$g(\exp\{2\pi i\xi/\varepsilon\}) = (f|[\mu^{-1}]_m)(\xi) \qquad (\xi \in U)$$

とできる．しかも f が U 上有理型であるのだから g は S-{O}上の有利関数なのである．

さて，m が偶数である場合この関数 g が原点 O で有利型であるとき，$D_m(\Gamma)$ の要素 $f(\xi)$ が Γ の cusp$a$ において有利型であると表現する．同様に g が O で正則のとき，$D_m(\Gamma)$ の要素 $f(\xi)$ が Γ の cusp$a$ において正則であるという．m が奇数のときには f^2 が Γ の cusp$a$ において有理型であるときに f は a で有理型である，正則のとき f は a で正則であるという．$D_m(\Gamma)$ の要素 f が Γ の cusp$a$ で有理型であるとし，$\mu a = \infty$ である $SL(2,\ R)$ の要素 μ をとる．m が偶数である場合，$g(\eta)$ を(6)で与えられる有理関数としこれの原点における Laurent 展開を

$$g(\eta) = \sum_{k=N}^{\infty} a_k \cdot \eta^k \qquad (a_N \neq 0)$$

で表すと十分大きな正の数 l をとって，$\{\xi \in U | \mathrm{Im}(\xi) > l\}$ においては

$$(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi) = \sum_{k=N}^{\infty} a_k \exp(2\pi ik\xi/\varepsilon) \tag{7}$$

が成り立つ．次に m が奇数である場合については，$f^2|[\mu^{-1}]_{2m} = (f|[\mu^{-1}]_m)^2$ が(7)のかたちに展開されること，および

$$(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi+\varepsilon) = \pm(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)$$
（± は a の正則性の正負）

であることより，十分大きな正の数 l をとれば，$\{\xi \in U | \mathrm{Im}(\xi) > l\}$ においては

$$(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi) = \sum_{k \geqq N} a_k \exp(2\pi ik\xi/\varepsilon) \qquad (a_N \neq 0) \tag{8}$$

ここに k に関する和は cusp$a$ が正則，非正則のそれぞれで $k \geqq N$ における偶数，奇数にわたる和である．

(7)および(8)の右辺は $\{\xi \in U | \mathrm{Im}(\xi) > l\}$ において広義一様に絶対収束し，さらに $f(\xi)$ が U で正則ならば U 全体で広義一様に絶対収束する．また

f が a で正則 $\Leftrightarrow$ $N \geqq 0$，f が a で零点を持つ $\Leftrightarrow N > 0$

であることは明らかである．

さてここで，Γ が第一種の Fuchs 群であるときに以下の3個の C 上のベクトル空間を導入する；

$A_m(\Gamma) = \{f \in D_m(\Gamma) | f$ は Γ の cusp で有理型$\}$，
$J_m(\Gamma) = \{f \in D_m(\Gamma) | f$ は U 上および Γ の cusp で正則$\}$，
$P_m(\Gamma) = \{f \in D_m(\Gamma) | f$ は U 上で正則で Γ の cusp で

零点を持つ}.

$A_m(\Gamma)$，$J_m(\Gamma)$それぞれの要素はΓに関する weight m の有理型保型形式および正則型保型形式であり，$P_m(\Gamma)$の要素はΓについての cusp 形式とよばれる．包含関係は一般に$P_m(\Gamma)\subset J_m(\Gamma)\subset A_m(\Gamma)\subset D_m(\Gamma)$であるが，もし$\Gamma$が尖点をもたなければ$P_m(\Gamma)=J_m(\Gamma)$，$A_m(\Gamma)=D_m(\Gamma)$である．さらに，

$$
\begin{aligned}
&f\in A_m(\Gamma),\ f\neq 0 \text{ ならば } f^{-1}\in A_{-k}(\Gamma),\\
&f\in A_m(\Gamma),\ g\in A_n(\Gamma) \Rightarrow fg\in A_{m+n}(\Gamma),\\
&f\in J_m(\Gamma),\ g\in J_n(\Gamma) \Rightarrow fg\in J_{m+n}(\Gamma),\\
&f\in J_m(\Gamma),\ g\in P_n(\Gamma) \Rightarrow fg\in P_{m+n}(\Gamma),
\end{aligned}
$$

であることも分かるので，$D(\Gamma)$が次数付きの環であることを考慮すれば

$$A(\Gamma)=\sum_m A_m(\Gamma),\quad J(\Gamma)=\sum_m J_m(\Gamma),\quad P(\Gamma)=\sum_m P_m(\Gamma)$$

で定義される$A(\Gamma)$，$J(\Gamma)$，$P(\Gamma)$は次数をもった環であることが分かる．とくに$m=0$の場合：$A_0(\Gamma)$は体であるので，その要素をΓに関する保型関数，$A_0(\Gamma)$自体を保型関数体とよぶ．fがΓに関する保型関数であるとき$f|[\gamma]_0=f(\gamma\xi)$であるので$f$は$\Gamma/U$上の有理関数$\tau$によって$f(\xi)=\tau\circ\Omega_\Gamma(\xi)$と表わされる．ここに$\Omega_\Gamma$は U から$\Gamma/U$への自然な写像である．また$f$が$\Gamma$の尖点で有理型なので$\tau$はコンパクト Rieman 面$\Lambda_\Gamma$上の有理型関数である．反対に，$\tau\in S(\Lambda_\Gamma)$について$f(\xi)=\tau\circ\Omega_\Gamma(\xi)$ $(\xi\in U)$と U 上の関数$f(\xi)$を定義すれば，$f\in A_0(\Gamma)$であるから$S(\Lambda_\Gamma)$と$A_0(\Gamma)$は$\tau\longrightarrow\tau\circ\Omega_\Gamma$により同型な体である．

つぎに，Γが第一種の Fuchs 群のときについて，Γの任意の有限指数部分群をΓ'とする．$P_m(\Gamma)$の要素も$D_m(\Gamma)\cap P_m(\Gamma')$の要素も U 上正則であって，$\Gamma$の任意の要素$\gamma$に対し$f|[\gamma]_m=f$が成り立つ．よって$\Gamma$が cusp を持たなければ$P_m(\Gamma)=D_m(\Gamma)\cap P_m(\Gamma')$である．これは$\Gamma$が cusp を持つ場合にもいえる．なぜなら，$\Gamma$が cusp$a$をもつとすると，$a$は$\Gamma'$の cusp でもある．SL(2, R)の要素$\lambda$と正数$\varepsilon$を(6)のようにとり$p=[\Gamma_a\cdot\{\pm1\}:\Gamma_a\cdot\{\pm1\}]$を考えると p は有限の量であって

$$\mu\Gamma a\mu^{-1}\cdot\{\pm1\}=\{\pm\begin{pmatrix}1 & pk\varepsilon\\ 0 & 1\end{pmatrix}|k\in Z\}$$

となる．いま$P_m(\Gamma\ )$のひとつの要素fをとると

$$
\begin{aligned}
(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)&=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp(2\pi ik\xi/\varepsilon)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp(2\pi ipk\xi/p\varepsilon)
\end{aligned}
$$

なので$f\in P_m(\Gamma')$である．ぎゃくにfが$D_m(\Gamma)\cap P_m(\Gamma)$の要素であるとすると$(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)=\sum a_k\exp(2\pi ik\xi/p\varepsilon)$であるが，$f$は$D_m(\Gamma)$の要素なので$(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi+\varepsilon)=(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)$であるので k と p が互いに素ならば$a_k=0$なので，これは$(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)=\sum a_{kp}\exp(2\pi ik\xi/\varepsilon)$を与えることになって$f$は$P_m(\Gamma)$の要素でもある．つまり$P_m(\Gamma)=D_m(\Gamma)\cap P_m(\Gamma)$なのである．$A_m(\Gamma)$，$J_m(\Gamma)$についても全く同様にして

$$X_m(\Gamma)=D_m(\Gamma)\cap X_m(\Gamma'),\quad X_m(\Gamma)\subset X_m(\Gamma')\quad (X=A,\ J,\ P) \tag{9}$$

であることが分かった．

ここで，$f(\xi)$は$D_m(\Gamma)$の要素である U 上の正則関数であって，$\mathrm{Im}(\xi)\to 0$のとき$f(\xi)=O[\mathrm{Im}(\xi)^{-\lambda}]$なる正数$\lambda$がとれるなら$f(\xi)\in J_m(\Gamma)$であり．さらに，$\lambda<m$であるなら$f(\xi)\in P_m(\Gamma)$である．このことは，$\Gamma/U$がコンパクトであるときは自明であるが，$\Gamma$が cusp を持つ場合については示す必要があろう．aをΓの実軸上にある cusp とする．SL(2, R)の要素μで$\mu a=\infty$となるものをとり，正の数εを(6)であたえるとき

$$(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\cdot\exp(2\pi ik\xi/\varepsilon)\quad(\xi\in U)$$

なる U 上で広義一様に収束する級数に展開できる．係数a_kは U の点ξ_0を固定すれば

$$a_k=\int_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon}(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)\cdot\exp(-2\pi ik\xi/\varepsilon)\cdot d\xi/\varepsilon$$

で与えられる．ここで$(\mu^{-1})_{21}\neq0$であるので，いま，$|\mathrm{Re}(\xi)|\leqq\varepsilon/2$において$\mathrm{Re}(\xi)$に関しては一様に$(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)=f(\mu^{-1}\xi)/[\phi(\mu^{-1},\ \xi)]^m=O[\mathrm{Im}(\xi)^{\lambda-m}]$ $(\mathrm{Im}(\xi)\to\infty)$が成り立っている場合である．よって上記の積分において$\xi_0=iy-\varepsilon/2$としてやれば$|a_k|=O[y^{\lambda-m}\cdot\exp(2\pi ky/\varepsilon)]$ $(y\to\infty)$となるので，$k<0$ならば$a_k=0$であり，さらにもし$\lambda<m$ならば$a_0=0$である．ゆえに$f(\xi)$はaにおいて正則で，$\lambda<m$ならばaで零点を持つことがわかる．ただし，もし∞がΓの cusp であってもΓは第1種の Fuchs 群であるから，実軸上に∞と同値な cusp を持つので$f(\xi)$はΓの任意の cusp で正則であり，$\lambda<m$ならばΓの任意の cusp で零点

を持つことが示された．このことから次の定理が示される；

定理 10・1：$D_m(\Gamma)$とその要素$f(\xi)$について

$$f(\xi)\in P_m(\Gamma) \quad \Leftrightarrow \quad f(\xi)[\mathrm{Im}(\xi)]^{\frac{m}{2}}\text{が U で有界.}$$

(証明)まず，←は証明済みであるので→を示せばよい．$g(\xi)=|f(\xi)|\cdot \mathrm{Im}(\xi)^{m/2}$とかくと$g(\gamma\xi)=g(\xi)$が任意の$\gamma(\in\Gamma)$において成りたつから$g(\xi)$は$\Gamma/U$上の連続関数とみられるので，$\Gamma/U$がcompactなら$g(\xi)$は$\Gamma/U$上で有界である．いま，$\Gamma$がcuspを持つ場合をかんがえる．$g(\xi)$は$\Gamma/U$のcompactな任意の部分集合上では有界なのであるから，cusp近傍で有界のことを示せば十分である．Γの任意のcusp$a$をとり，$\mu\in SL(2,\ R)$を$\mu a=\infty$である要素とする．εは$\mu\Gamma_a\mu^{-1}\cdot\{\pm1\}=\{\pm\begin{pmatrix}1 & k\varepsilon\\ 0 & 1\end{pmatrix}|k\in Z\}$を満たす正数にとる．このとき$(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp(2\pi ik\xi/\varepsilon)$と展開されるので$|g(\mu^{-1}\xi)|=|(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)|\cdot\mathrm{Im}(\xi)^{m/2}\to 0(\mathrm{Im}(\xi)\to\infty)$であるので$g(\xi)$は$a$の近傍で有界である．(証明終わり)

よって$f(\xi)\in P_m(\Gamma)$のとき，a_0はΓのcuspであり$\mu(\in SL(2,\ R))$として$\mu a_0=\infty$ととる．εは$\mu\Gamma_{a_0}\mu^{-1}\cdot\{\pm1\}=\{\pm\begin{pmatrix}1 & k\varepsilon\\ 0 & 1\end{pmatrix}|k\in Z\}$を満たす正数にする．このとき$f$の$a_0$における Fourier 展開が

$$(f|[\mu^{-1}]_m)(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp(\pi ik\xi/\varepsilon),$$

であるなら$a_k=O(k^{\frac{m}{2}})$が成り立つことも同時に導かれる．

参考文献

1）桜岡　充：群の可解性と準同型写像Ⅰ，Ⅱ，日本歯科大学紀要（一般教育系）**27,** 21－26（1998），**30,** 23－27（2001）.

2）桜岡　充：共変式の環と半不変式の環の同型性Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，日本歯科大学紀要（一般教育系）**33,** 11－15（2004），**34,** 5－9（2005），**35,** 7－11（2006），**36,** 5－8（2007），**37,** 7-10（2008）.

3）J. A. Dieudonne and J. B. Carrell : Invariant Theory, old and new, Academic Press（1970）.

4）森川　寿：不変式論，紀伊国屋書店（1990）.

5）桜岡　充：Kummer 拡大体と準同型写像群Ⅰ，Ⅱ，日本歯科大学紀要（一般教育系）**31,** 25－33（2002），**32,** 5－7（2003）.

6）永田雅宜：可換体論，裳華房（1967），可換環論，紀伊国屋（1992）.

7）O. Zariski and P. Samuel : Commutative algebra Ⅰ，Ⅱ，van Nostrand, New york Ⅰ(1958), Ⅱ(1960).

8）M. Nagata : Local rings, John Wiley, (1962).

9）H. Saito : Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, Lectures in Mathematics, Kyoto Univ.(1975).

10）V. W. Guillemin : Infinite dimensional primitive Lie algebra, J. Diff. Geom. **4,** 257－282(1970).

11）O. Zaiski : Analytical irreducibilty of normal varieties, Ann. Math. **49,** 352－361(1948).

12）松村英之：集合論入門，朝倉書店（1992）.