

Wolff の法則と有限要素法による骨梁の可視化

Wolff's law and Visualizations of Trabecular Bone by Finite Element Method

歯学部 大崎弥枝子

Yaeko OHSAKI

Physics Laboratory, The Nippon Dental University,
Fujimi, Chiyoda-ku, Tokyo 102-8159, JAPAN

(2005 年 12 月 16 日 受理)

Visualizations of the trabecular bone in the calcaneus is performed on the basis of the Wolff's law with use of Finite Element Method(FEM). It is noted that distributions of stress and strain in the bone are obtained by solving optimization problems.

Key words: Wolff's law, trabecular bone, visualizations, Finite Element Method

1 はじめに

体幹を支持する組織である骨について最初に物理学的視点から考察したのは、近代力学創始者の一人であるガリレオ・ガリレイ (Galileo Galilei) であった。彼は「新科学対話」の中で、動物の骨格について述べ、体が大きくなるにつれて大きさや体重を維持するための骨も太くなり、その増加は長さの増加に比べて大きくなければならず、比率が同じなら固く丈夫な材料で骨格を作らなければならないと材質についても言及している。これらは弾性力学的に次のような関係式で表現できる。体長を L , 体重を支える脚の骨を円筒と仮定してその半径を r とすると、体重は体長の 3 乗 L^3 , それを支える骨の断面積は半径の 2 乗 r^2 に比例することになる。したがって骨内に生ずる応力 σ とひずみ ϵ の比例限度内の弾性関係である Hook の法則

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (1)$$

は体長の変形を ΔL として、

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \propto \frac{1}{E} \cdot \frac{L^3}{r^2} \quad (2)$$

となり、骨の弾性係数 E が等しく、自重による脚のひずみを弾性限度内で等しいとすると、骨の太さ r は体長 L の $3/2$ 乗で増加するか、骨が弾性係数 E の大きい固い材料でできていなければならないことになる。

このように骨を力学的な視点で研究する立場から、19 世紀にはバイオメカニクスの最初の法則といわれている「骨海綿質小梁の配列は主応力線方向に従う」というクルマン-マイヤー (C.Culmann-G.H.Meyer) の仮説が提唱された。また同じ頃、力学的解析を重視したヴィルヘルム・ルー

(Wilhelm Roux) は、生体器官は使用することによって機能的に適応するという考えを提唱した。これは「機能的刺激によって制御された定量的自主規制機構」と呼ばれ、生体の諸器官の構造は「最小材料による最大効果」の法則、あるいは「最小材料による最大強度」の法則、生物のかたち決定原理「最小材料最大効果説」となった。これらの仮説や考えは、Wolff により、骨は周囲の力学環境の影響のもと、適応的に形態や特性を変化させるという経験則としてまとめられ、実験的にも支持されて、今日では Wolff の法則として知られている¹⁾。このような生体における経験則はある種の最適化問題とみなせる。

ここでは、この Wolff の法則を考慮した骨の弾性力学的最適化問題を考え、変分原理に基づく有限要素法により求めた応力分布を用いて、海綿骨骨梁の構造を可視化することを試みる。

2 最適化問題と有限要素法

ある条件の下で目的関数が最大値または最小値をとる解を求める最適化問題は、対応する領域や問題設定により、連続最適化と離散最適化、あるいは局所最適化と大域的最適化に大別され、その解は大域的な最小解や局所的な最小解等に区分される。近年、連続体構造の位相を最適化する方法をバイオメカニクスに応用して、Wolff の法則による結果とよく合うとする研究²⁾や最適な力学構造として骨梁形成が外力の方向になされることを導いたシミュレーション³⁾など、生体構造や機能を力学的最適化という観点から研究する試みがいろいろとなされている。

有限要素法は微分方程式の数値解法であるが、その基礎の一つは変分原理であり、たとえば最小ポテンシャルエネ

ルギー原理に基づいて弾性体の構造を決定する問題等の最適化問題の解法として、しばしば用いられる。

また物理学においても、質点系や剛体の力学だけでなく、固体も流体とともに連続体として、変形も扱う連続体力学が盛んになってきた⁴⁾。粒子記述と連続体記述との違いは見方のスケールが異なることである。粒子集団も平均化あるいは粗視化して見ることより連続体記述ができる⁵⁾。従来の物体を固体、液体、気体や後者二体だけを流体とした明確な区分から、時間的スケールや状況によって、弾性体や塑性体あるいは弾塑性体として扱うようになってきた。

一方計算機の高速化と大容量化により、理論的あるいは実験的研究だけでは十分究明することができなかった力学や現象をコンピュータの力をかりて研究する新しい計算力学の分野が発展してきた。この計算力学は、連続体を要素に分割する離散化手法によって力学理論に従う支配方程式の数値解を求め、非線形問題を含むより広い分野の問題解決の強力な手法となりつつある。またそれによるシミュレーションが詳細な観測や困難な実験を経ないでも様々な現象の理解を助ける新たな可視化技術となってきた。このような可視化技術は、それによって一目で現象を理解することができ、いろいろな考察を行うのに有用である。最近の超音波技術により人体のいろいろな臓器の像を得ることが可能となったが、これらをシミュレーションと組み合わせると新たな可視化像を得れば、病状の程度などを診断するのに役立つと思われる。

計算力学の多くの問題で偏微分方程式を数値的に解くことが必要であるが、有限要素法はこのような数値解法の代表的なものである。

有限要素法は文字通り物体を有限個の要素に分割し、各要素ごとに変位分布などの未知関数を簡単な関数で表現し、その集まりとして物体全体の様相を近似的に表わす。構造力学におけるマトリックス法から出発したこの方法は、直接偏微分方程式を扱う代わりに等価な変分原理を使って、系の持つポテンシャルエネルギーを最小にするように未知関数を決める。この決定された関数がもとの微分方程式の解になっていることは変分原理が保障し、物理現象の多くでこのような極値問題が存在する。変分原理の一種である最小ポテンシャルエネルギー原理は、静的なつりあい状態において、変位 u の関数であるポテンシャルエネルギーが最小となることを主張する。逆にいえばポテンシャルエネルギーが最小になるような変位を見つければ、それがつりあい状態の変位、つまり場の基礎方程式の解になっている。弾性境界値問題の方程式を解くことと等価である。有限要素法は要素ごとの関数近似という考え方とポテンシ

アルエネルギーの最小化を組み合わせ、ポテンシャルエネルギーをできるだけ小さくするように、各要素の近似関数の係数を決めるという問題になる。具体的には構造全体の剛性方程式である連立 1 次方程式を解くことに帰着する⁶⁾。

3 弾性力学と骨梁

一般に、弾性体は外から力が加わると変形し、そのひずみと生じる応力との関係は次のような一般化された Hook の法則として表わされる。

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (3)$$

ここで σ_{ij} は応力テンソル、 ϵ_{ij} はひずみテンソル、 E_{ijkl} は 4 階の弾性係数テンソルである。あるいは、これを等価な関係

$$\epsilon_{ij} = C_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (4)$$

と表すこともある。このとき、 C_{ijkl} を弾性コンプライアンステンソルと呼ぶ。3 次元では E_{ijkl} は 81 個の成分をもっているが、応力テンソルとひずみテンソルの対称性

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \epsilon_{kl} = \epsilon_{lk} \quad (5)$$

より、それぞれの独立な成分は 6 個である。弾性係数テンソルも対称性

$$E_{ijkl} = E_{jikl}, \quad E_{ijkl} = E_{ijlk} \quad (6)$$

をもち、独立な成分は 36 個であるが、物体の等方性や異方性、均質性や不均質性によって独立な成分の数は変わる。応力テンソルとひずみテンソルの独立な成分 6 個をそれぞれ 6 行 1 列の列ベクトルで、2 次元では独立な成分 3 個を 3 行 1 列の列ベクトルで表わす表示もある。

有限要素法では変形は分割された各要素の頂点である節点の変位として表され、要素は節点で相互に連結されている。節点での変位を要素ごとに $\{u_m\}$ で表し、ひずみ $\{\epsilon_m\}$ との関係

$$\{\epsilon_m\} = [B_m] \{u_m\}, \quad (7)$$

と表わすと、 $[B_m]$ は形状関数、内挿関数あるいは変位関数と呼ばれる関数に関係して、要素の形状によって決まる。ここで $\{u_m\}$ や $\{\epsilon_m\}$ は 6 行 1 列や 3 行 1 列の列ベクトル、 $[B_m]$ はマトリックスを表わしている。

ひずみと応力との関係を

$$\{\sigma_m\} = [D_m] \{\epsilon_m\} \quad (8)$$

と表わせば、要素内の応力も節点変位を用いて

$$\{\sigma\} = [D][B] \{u\} \quad (9)$$

のように表すことができる。

また、物体内微小部分の応力テンソルが σ のとき、適当な方向の面を考え、その法線ベクトルを \mathbf{n} とする。 σ によってその面に生じる応力ベクトル \mathbf{t} は

$$\mathbf{t} = \sigma^T \mathbf{n} \quad (10)$$

で求まり、表面力はその1つである。 σ^T は転置テンソルを表わし、この式をコーシー (Cauchy) の関係という。

これら物質の構成方程式と前述のひずみ-変位関係の式とともに次のような応力のつりあい関係の式が有限要素法の基礎方程式である。

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \quad (11)$$

ここで ρ は密度、 b_i は単位質量あたりの体積力の i 方向の成分、 $\sigma_{ji,j}$ は σ_{ji} 成分の j 方向座標の微分を表わし、添字の重複は次元の数だけの和をとるアインシュタインの総和規則に従うとする。

物体に力が加わると、その変形が微小で熱平衡状態からあまりずれていないとき、弾性体内部に生ずる応力がする仕事は一種のポテンシャルエネルギー (ひずみエネルギー) として蓄えられる。その単位体積当たりの弾性エネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \sigma \epsilon, \quad (12)$$

である。構成関係式を用い、マトリックス表現すると

$$U = \frac{1}{2} \epsilon^T [D] \epsilon, \quad (13)$$

これを節点変位 \mathbf{u} で表すと

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T [B]^T [D] [B] \mathbf{u}. \quad (14)$$

このひずみエネルギーの他に外力 (体積力 \mathbf{b} と表面力 \mathbf{t}) によるエネルギーを考慮して、次のようなポテンシャルエネルギー汎関数 I を考える。

$$I[\mathbf{u}] = \int_V U dV - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \quad (15)$$

この第1項は

$$\int_V U dV = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{u}^T [B]^T [D] [B] \mathbf{u} dV = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T [\mathbf{K}] \mathbf{u} \quad (16)$$

ここで $[\mathbf{K}]$ は剛性マトリックスで次のように表わされる

$$[\mathbf{K}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV. \quad (17)$$

第2項は体積力 \mathbf{b} 、第3項は表面力 \mathbf{t} に関係している。

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{b}^T [B] dV \quad (18)$$

$$\mathbf{t} = \int_s \mathbf{t}^T [B] dS \quad (19)$$

とおけば、要素のポテンシャルエネルギーは節点変位の関数として

$$I^e[\mathbf{u}^e] = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} [\mathbf{K}]^e \mathbf{u}^e - \mathbf{F}^{eT} \mathbf{u}^e - \mathbf{t}^{eT} \mathbf{u}^e \quad (20)$$

となる。物体全体では全要素の和で与えられる

$$I = \sum_e I^e[\mathbf{u}^e]. \quad (21)$$

この物体全体のポテンシャルエネルギーを最小にするような未知の節点変位を求める。例えば2次元では

$$\frac{\partial I}{\partial u_x^e} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial u_y^e} = 0; \quad e = 1, \dots, N \quad (22)$$

ここで u_x^e, u_y^e はそれぞれ要素 e での変位の x 座標、 y 座標の成分であり、 N は要素の数である。したがって $2N$ 個の条件式

$$\sum_e \mathbf{u}^{eT} [\mathbf{K}]^e - \sum_e \mathbf{F}^{eT} - \sum_e \mathbf{t}^{eT} = 0 \quad (23)$$

を得、これを解けばよい⁶⁾。

このようにして求めた節点変位から要素内のひずみ、応力が求められる。物体内の応力は考える面によって、その面に垂直な法線応力と平行なせん断応力を持つ。この面を適当に選ぶことによってせん断応力を生じない法線応力だけがある面をとることができ、そのような面を主応力面、そこに働く応力を主応力という。各要素で主応力を求め図示することにより、主応力線図が得られる。

一方骨は骨質、関節軟骨、骨膜、骨髓からなり、骨質は皮質骨と海綿骨に大別される。皮質骨は強固な緻密骨で骨の外側に存在している。海綿骨は皮質骨の内部で小柱状をした骨梁が海綿状に配列した骨である。骨の形態維持には、発育期に新たな部位に骨を構築するモデリングと成人後の古くなった骨を取り除き、その場所に新しい骨を再構築するリモデリングがある。前者は主に軟骨が関与し、成長期には長管骨等で縦方向に成長して、1次海綿骨と呼ばれる線維性骨で構成される。後者は1次海綿骨のリモデリングにより緻密な層板構造をもつ層板骨に置き換えられた2次海綿骨として力学的負荷やエストロゲン等で制御されている。この過程は骨芽細胞・破骨細胞・骨細胞等の細胞成分、コラーゲン線維を代表とする有機性基質、無機塩であるハイドロキシアパタイトからなり、骨芽細胞はコラーゲン分

泌やカルシウムの沈着の石灰化に関与し、破骨細胞は石灰化した骨の破壊・吸収を行う。大型哺乳動物の骨で行われているリモデリングでは、骨吸収が先行し、吸収された部位に骨形成が続いて起こるという代謝様式をとる。骨量を維持するためには吸収量と形成量のバランスを保つ必要がある。このバランスが崩れると骨粗鬆症等の骨疾患が生じる。この形成される骨梁は Wolff の法則に従い骨が受ける力学的負荷の方向性を持ち、力学的負荷に対する抵抗性を大きくしていると考えられる。厳密には骨形成の遺伝的なものと力学的刺激によるものとの問題などについて、生体的な実験と制御理論が必要である。また骨再生の配列はミクロあるいはナノスケールでの生体アパタイトの結晶学的な構造の研究⁷⁾等の蓄積を待たなければならない。しかしその配列を決める環境因子の最大のは負荷荷重であり、ここではマクロ的な弾性力学の立場から最適化の問題として考える。特に海綿骨の骨梁はその骨細胞が受ける主応力の方向にその大きさに対応して再生されると考えられるので、大部分が海綿骨で占められるような骨に適当な力をかけたとき、有限要素法によって求められた主応力の図示を骨梁の近似的な可視化とみなしてもよいであろう。

4 骨梁のシミュレーション

骨は Wolff の法則により周囲の荷重環境に対して力学的に最適な形態・構造をとっているとして、機械的刺激と骨の吸収・形成との関係に注目する。骨の中で荷重が大きく働く部位では骨形成による骨の増強が、荷重が働かない部位では骨吸収による骨基質の除去が生じるというモデルを考えて、有限要素法によって応力分布を計算し、骨梁分布と対応づければ、近似的に骨形態のイメージを得ることができる。

最近超音波による踵骨の音速から密度の測定が容易になり、手軽に骨密度データの情報を得ることができるようになった。しかし測定結果として示されるのは、統計的なデータによる、同年齢あるいはピークと考えられている 20 歳の平均値と比較した数値が一般的なようである。従来の骨粗鬆症診断は大腿骨頸部の骨梁密度の減少による Singh の分類が有名であり、X線写真による骨梁の吸収度は一目で分かりやすい。ここでは骨、特に海綿骨の骨梁が外力に抗して生成され、骨内に生ずる応力が微小であれば消滅すると仮定して、90%以上が海綿骨であるといわれている踵骨の例を考える。数値シミュレーションとして 2 次元有限要素法を用い、その主応力図によって踵骨骨梁の骨変化分類の可視化を試みる。まず踵骨のモデルを要素分割して適当な拘束条件を仮定し、体重がかかるといわれる上部斜め方向に荷重して、全要素に適当な主応力値が得られる健康

な骨梁分布と見なせる図を描いた。その後加える力を 20% ずつ減少し、主応力の値が基準以下のところが消滅したとして次のような主応力図をえた。

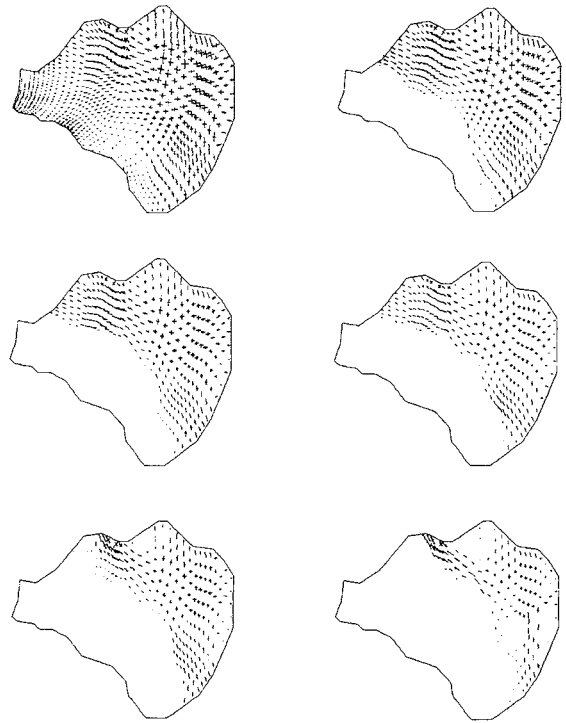


図 荷重減少による踵骨骨梁減少のシミュレーション

踵骨の超音波計測も上記のようなイメージとともに示されれば骨粗鬆症の病態の認識が容易になると思われる。実用化には実際の荷重による応力分布やX線写真等と比較した様々なデータを蓄積して、より現実に近い多くの像を得ることが必要である。その分類には生理学・病理学的理論とともに数理科学的な画像解析による定量的指標が望まれる。また運動等荷重増加による骨梁増加についてのモデル構築も今後の課題である。なおここでの計算および図式化はトータル・インフォメーション・サービスによる解析システムを用いた。

参考文献

- 1) Fung, Y.C.: Biomechanics, Motion, Flow, and Growth. University of California, San Diego, USA. 1990.
- 2) Machao, G.T. and Trabuco, L.: Some results in topology optimization applied to biomechanics. Computers & Structures, **82**, 1389-1397 2004.
- 3) Huiskes, R. et al.: Nature, **405**, 704-706 2000.
- 4) Fung, Y.C.: Continuum mechanics, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA. 1977.
- 5) 川原琢治: 連続体力学, 産業図書 1996.
- 6) 田中喜久昭, 長岐滋, 井上達雄: 弾性力学と有限要素法, 大河出版 1995.
- 7) Nakano, T. et al.: Bone, **31**, 479-487 2002.