共変式の環と半不変式の環の同型性　III

Isomorphism between Covariant Ring and Semi-invariant Ring　III

新潟歯学部　桜岡　　充

Mitsuru SAKURAOKA

The Nippon Dental University, Hamaura-cho 1-8.

Niigata 951-8580, Japan

（2005年11月24日受理）

Abstract

The finite generated of an invariant ring found by Jordan is shown by making use of Hilbert base theorem. It will be also introduced that the considerations of Cayley-Hilbert on the necessary and sufficient condition for the null-form of a form of degree n.

Key Index Words : isomorphism, Lie ring, transvectant.

Sec 5　不変式環の有限生成性

指数 m の同次同重多項式からなるベクトル空間を V[m] であらわすとき，Sec 2 でのべたように，不変式環 K[ξ] から V[m] への射影作用素 $\Pi[m]$ が定義され

$$K[\xi]=\bigoplus_{m} V[m]$$

と直和分解される。ここで，

$$D=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l}(m+1)\,!}{l\,!\,(m+l+1)\,!}\Delta^{l}\mathscr{D}^{l}\Pi\,[m] \qquad (1)$$

で与えられる K［ξ］に作用する微分作用素を導入しよう。このとき，d-同次，p 同重多項式 ϕ に対して，$D^{l}\phi\in V[M+2l]$（ここに $M=nd-2p$）であるので

$$[\mathscr{D},\ \Delta^{l}]=l(M+l+1)\Delta^{l-1}\mathscr{D}^{l}\phi$$

である。したがって，$\Delta^{l}\mathscr{D}^{l}\phi$（$l\geqq 0$）は d-同次，p 同重なので，$\mathscr{D}D(\phi)$ をつくると

$$\begin{aligned}\mathscr{D}D(\phi)&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l}(M+1)\,!}{l\,!\,(M+l+1)\,!}\ \mathscr{D}\Delta^{l}\mathscr{D}^{l}\phi\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l}(M+1)\,!}{l\,!\,(M+l+1)\,!}\Delta^{l}\mathscr{D}^{l+1}\phi\\&\quad+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l}(M+1)\,!}{l\,!\,(M+l+1)\,!}[\mathscr{D},\ \Delta^{l}]\mathscr{D}^{l}\phi\\&=0\end{aligned}$$

より $D(\phi)$ は（d, p）半不変式でなっている。したがって，ϕ 自身が半不変式なら $D(\phi)=\phi$　である。さらに，不変式 Φ に対しては，$\mathrm{ind}(\Phi)=0$　なので

$$\begin{aligned}\Pi[m](\Phi\psi)=\Phi\Pi[m]\psi,\ \Phi\left(\rho_n\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}\xi\right)\\=\Phi\left(\rho_n\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\xi\right)=\Phi(\xi)\end{aligned}$$

であるから　$\mathscr{D}\Phi=\Delta\Phi=0$。よって任意の l，$m\geqq 0$　に対しては

$$\Delta^{l}\mathscr{D}^{l}\Pi[m](\Phi\psi)=\Delta^{l}\mathscr{D}^{l}(\Phi\Pi[m]\psi)=\Phi\Delta^{l}\mathscr{D}^{l}\Pi[m]\psi$$

ここに ψ は任意の多項式でよい。このことを用いると

$$\begin{aligned}D(\Phi\psi)&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l}(M+1)\,!}{l\,!\,(M+l+1)\,!}\Delta^{l}\mathscr{D}^{l}\Pi[m](\Phi\psi)\\&=\Phi D(\psi)\end{aligned}$$

こうして，(1) で定義される微分作用素は，(d, p) 同次同重多項式 ϕ に対して $D(\phi)$ は（d, p）-半不変式を与え，半不変式 η については $D(\eta)=\eta$ を与える．そして不変式 Φ に対してはまったく任意の多項式 ψ について $D(\Phi\psi)=\Phi D(\psi)$ を満たす。

つぎに，定数項をもたない不変式全体からなる K[ξ] の部分加群を J とするとき，Hilbert の基底定理より　同次不変式の基底 Φ_1，Φ_2，・・・・，Φ_rが存在して

$$J=K\ [\xi]\cdot\Phi_1+K[\xi]\cdot\Phi_2+\cdots+K[\xi]\cdot\Phi_r$$

とかける。そして，任意の同次不変式 Φ は $K[\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_r]$ の要素である。これは以下のように示せる： まず，同次式の次数が0の場合は自明である。$(d-1)$ 次以下の同次不変式は $K[\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_r]$ の要素であると仮定する。次数 d の同次不変式であるとき

$$\Phi=\phi_1\Phi_1+\phi_2\Phi_2+\cdots+\phi_r\Phi_r \quad (\phi_i \text{は多項式})$$

と書けるので，この両辺に微分作要素 D を作用させれば

$$\Phi=D(\Phi)=\Phi_1D(\phi_1)+\Phi_2D(\phi_2)+\cdots+\Phi_rD(\phi_r)$$

である。Φ_iの指数は0であり同次同重多項式であるから ϕ_i $(1 \leqq i \leqq r)$ は同次同重多項式で指数0である。D は指数を不変に保つ微分演算子であるのだから $D(\phi_i)\,(1 \leqq i \leqq r)$ は指数0の半不変式つまり同次不変式である。さらに

$$\deg(D(\phi_i))=\deg(\phi_i)=\deg(\Phi)-\deg(\Phi_i)<d$$

である。こうして，任意の同次不変式 Φ は $K[\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_r]$ の要素なのである。ゆえに 不変式

$$f(\xi|x)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\xi^{(l)}x^{l} \tag{2}$$

全体は $K[\xi]$ の部分環であって，K 上有限生成なのである。

つぎに，共変式環の有限生成性の議論に移る。$GL(2)$ の1次の多項式表現に関して，1次多項式表現 $\rho(x)$ の多項式としての次数を d とすると，$g(x)=(\det x)^d \cdot \rho(x^{-1})$ は多項式である。$\rho(x)\rho(x^{-1})=\rho(1)=1$ なので $\rho(x)g(x)=(\det x)^d$。また，$\det x=x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}$ は既約であるので $\rho(x)=c(\det x)^p$ である定数 c と整数 p が存在する。$x=1$ とすれば$c=1$，よって $\rho(x)=\det x^p$である。つまり，$GL(2)$ の1次の多項式表現は p を負でない整数として，

$$x \quad \mapsto \quad \det x^p$$

によってすべて得られる。

多項式環 $K[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}]$ の要素については定数倍をのぞけば既約多項式の積への分解はつねに一意的に可能であるので，$GL(2)$ の $(n+1)$ 次の有理表現 $\rho(x)$ の分母は多項式である。これを $q(x)$ とすれば $q(x)$ は定数倍を除いて一意である。いま，x に独立な $K[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}]$ 上に成分をもつ2次の行列を y とすれば $\rho(xy)=\rho(x)\rho(y)$ であるから $\rho(xy)$，$\rho(x)$，$\rho(y)$ それぞれの分母間には $\lambda q(xy)=q(x)q(y)$ なる関係が存する。よって分母に $q(x)$ でなく $p(x)=q(x)/\lambda$ を用いれば，$p(xy)=p(x)p(y)$ であり p は $GL(2)$ の1次多項式表現を与えることになる。それゆえ，負でない整数 m が存在して $p(x)=\det x^m$となる。よって，$\hat{\rho}(x)=\det x^m \cdot \rho(x)$ とおけば $\hat{\rho}$ は多項式表現をあたえるのである。ここで Ω-プロセスにふれておこう。$x_1, x_2, \cdots, x_m$ を m 次元ベクトル空間 V 上の座標関数，ρ を V に作用する $GL(2)$ の有理表現とする。$x_1, x_2, \cdots, x_m$の多項式を $A(x)$ とかくとき $\det s^g A\{\rho(s)x\}$ が s について多項式となるような負でない整数 g をとる。このとき負でない整数 r に対して

$$I(x)=[\Omega_s]^r \det s^g A\{\rho(s)x\}|_{s=0}$$

と定義すると

$$I(x)=0\,(g>r), \quad I\{\rho(s)x\}=\det s^{r-g}I(x) \qquad (s \in GL(2))$$

である。これは，以下のようにして示せる：$A\{\rho(s)x\}=G(s, x)$，$\det s^g A\{\rho(s)x\}=K(s, x)$ とかくと，$A\{\rho(st)x\}=G(st, x)=G(s, \rho(t)x)$ なので $\det\{st\}^g$を両辺に乗じてやると

$$K(st, x)=\det\{st\}^g G(st, x)=\det s^g \cdot \det t^g \cdot G(s, \rho(t)x)$$

$$=\det t^g \cdot K(s, \rho(t)x).$$

一方，仮定により $K(s, x)$ は s の成分について多項式なのであるから

$$\det t^g [\Omega_s]^r K(s, \rho(t)x)=[\Omega_s]^r \det t^g \cdot K(s, \rho(t)x)$$

$$=[\Omega_s]^r K(st, x)=\det t^r [\Omega_{st}]^r K(st, x),$$

なので $[\Omega_s]^r K(s, \rho(t)x)=\det t^{r-g}[\Omega_{st}]^r K(st, x)$ がいえる。この関係式に $s=0$ を代入すると $I\{\rho(t)x\}=\det t^{r-g}I(x)$ が得られる。

さて，$(n+3)$ 次元ベクトル空間の座標を $(\xi\,;x_0, x_1)=(\xi^{(0)}, \cdots, \xi^{(n)}\,;x_0, x_1)$ で表し，$GL(2)$ の作用を

$$\hat{\rho}(s)(\xi\,;x_0, x_1)=(\rho_n(s)\xi\,;(x_0, x_1)s^{-1}) \quad (s \in GL(2))$$

であたえると，$\hat{\rho}$ は $GL(2)$ の $(n+3)$ 次の有理表現になる。非同次変数 z についての m 次同次多項式 $F(\xi\,;x_0, x_1)$ が，$F(\xi\,;x_0, x_1)=x_0^m F(\xi\,;z)$ なる関係で対応する。したがって，指数 m，重さ p の共変式には x_0，x_1 に関して m 次同次の $K[\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(n)}\,;x_0, x_1]$ の要素 $F(\xi\,;x_0, x^1)$ のうちの

$$F(\rho_n(s)\xi\,;(x_0, x_1)s^{-1})=\det s^p F(\xi\,;x_0, x_1) \quad (s \in GL(2))$$

を満たすものが対応する。そこでこの $F(\xi;x_0, x_1)$ も指数，重さ（p，m）の共変式と呼ぶことにする。こうして，非同次変数zのかわりに，同次変数 x_0，x_1を用いて $K[\xi, x_0, x_1]$ のなかで考える。$\xi^{(0)},\cdots,\xi^{(n)}$，$x_0$，$x_1$をもたないKの要素のみから成る量を定数項とよぶことにする。定数項のない共変式全体で構成された $K[\xi, x_0, x_1]$ の部分加群（イデアル）をJとすると，$J\subsetneq K[\xi, x_0, x_1]$ であり，Jは x_0，x_1について同次イデアルに止まらず，重さについても同重のイデアルであるので，指数，重さ（m_i，p_i）の共変式 $\Phi(\xi;x_0, x_1)$ が存在して

$$J=K[\xi, x_0, x_1]\Phi_1+\cdots+K[\xi, x_0, x_1]\Phi_r$$

と書ける。ここで，指数，重さ（m，p）である共変式 Φ は $K[\Phi_1,\cdots,\Phi_r]$ に含まれる。これには Φ の $\xi^{(0)},\cdots,\xi^{(n)}$。$x_0$，$x_1$に関する次数に対する帰納法をみる。次数0のとき，定数項なしの共変式は0であるから次数 $d=0$ は自明。Jに含まれる次数が（$d-1$）以下の共変式は $K[\Phi_1,\cdots,\Phi_r]$ に含まれるとする。Φ はd次のJに含まれる重さがpの共変式とする。$\Phi_i(1\leqq i\leqq r)$ の次数は1以上であるので（$d-1$）次以下の多項式 $A_i(\xi;x_0, x_1)$ が存在して

$$\Phi=\sum_{i=1}^{r}A_i\cdot\Phi_i$$

とかける。両辺に $s\in GL(2)$ を作用させれば

$$\begin{aligned}\det s^p\Phi(\xi;x_0, x_1)&=\Phi(\rho_n(s)\xi;(x_0, x_1)s^{-1})\\&=\sum_i\det s^{p_i}A_i(\rho(s)\xi;(x_0, x_1)s^{-1})\Phi(\xi;x_0, x_1)\end{aligned}$$

が得られる。両辺に $\det s^l$を乗じて $[\Omega_s]^{p+l}$ を作用させると

$$\begin{aligned}&[\Omega_s]^{p+l}\det s^{p+l}\Phi\ (\xi;x_0, x_1)\\&=\sum_{l=1}^{r}[\Omega_s]^{p+l}\det s^{p_i+l}A_i(\rho_n(s)\xi;(x_i, x_1)s^{-1})\Phi_i(\xi;x_0, x_1)\end{aligned}$$

であるので $s=0$ としてやれば，

$$c_1\cdots c_{p+l}\cdot\Phi(\xi;x_0, x_1)=\sum_{i=1}^{r}I(\xi;x_0, x_1)\cdot\Phi_i(\xi;x_0, x_1),$$

ただし，$I_i(\xi;x_0, x_1)=[\Omega_s]^{p+l}\det s^{p_i+l}A_i(\rho(s)\xi;(x_0, x_1)s)|_{s=0}$，が得られる。重さは正であるから，$I_i(\xi;x_0, x_1)$ は次数が（$d-1$）以下で重さが（$p-p_i$）の共変式であるといえる。帰納法の仮定は $I_i(1\leqq i\leqq r)$ が $K[\Phi_1,\cdots,\Phi_r]$ の要素であることなのだから Φ は $K[\Phi_1,\cdots,\Phi_r]$ の要素である。（証明終り）こうして共変式

$$f(\xi|x)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\xi^{(l)}x^l \tag{3}$$

の全体は $K[\xi, x]$ の部分環で，K上有限生成であることが分った。Ω プロセスは $r\times r$ 行列についても全く同様に成立するので，一般線形群 $GL(r)$ についての不変式環，共変式環の有限生成性も同様である．

つぎの節で，不変式および共変式多様体への導入準備として零形式にふれておこう．

Sec 6　零形式

基本n次形式：$f(\xi|x_0, x_1)\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\xi^{(l)}x_0^{n-l}x^l$ で定数項をもたない不変式全体からなる $K[\xi^{(0)},\cdots,\xi^{(n)}]$ のイデアルをJで表す。Jのすべての要素 $\eta(\xi^{(0)},\cdots,\xi^{(n)})$ に対して $\alpha^{(0)},\cdots,\alpha^{(n)}$ が $\eta(\alpha^{(0)},\cdots,\alpha^{(n)})=0$ をみたすときのn次形式：$f(\alpha|x_0, x_1)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\alpha^{(l)}x_0^{n-l}x_1^l$ をn次零形式と呼ぶ。重さpのd次同重不変式

$$\eta(\xi)=\sum_{\{l_i\}}C_{l_0\cdots l_n}\cdot[\xi^{(0)}]^{l_0}\cdots[\xi^{(n)}]^{l_n}$$

において，指数公式より $nd=2p$ であるから

$$l_0+\cdots+l_n=d,\ l_1+2l_2+\cdots+nl_n=p=nd/2$$

である。ここでn次形式のnを $2r$ または $2r+1$ で表すことにする。ここで $l_0=l_1=\cdots=l_r=0$ とすると

$$nd/2=\sum_{j=r+1}^{n}jl_j\geqq d(r+1)=(2r+1)d/2+1/2$$

となり不合理，つまり $l_0,\cdots,l_r$ のうち少なくとも1つは零でないことになる。つまり不変式 $\eta(\xi)$ の各項は $\xi^{(0)},\cdots,\xi^{(r)}$ のいずれかを必ず含んでいる。

このことからn次形式：$f(\alpha|x_0, x_1)=\sum_{l=0}\binom{n}{l}\alpha^{(l)}x_0^{n-l}x_1^l$ が重複度（$r+1$）以上の1次因数をもつならn次形式：$f(\alpha|x, x_1)$ は零形式であることがいえる。なぜなら，

$$f(\alpha|x_0, x_1)=(c_0x_0+c_1x_1)^{r+1}\cdot g(\alpha;x_0, x_1)$$

とかく。β_0，β_1を $\beta_0c_1-\beta_1c_0\neq0$ であるよう適切に選んで，$(y_0, y_1)=(\beta_0x_0+\beta_1x_1,\ c_0x_0+c_1x_1)$，$\sigma=\begin{pmatrix}b_0 & c_0\\ b_1 & c_1\end{pmatrix}$ で表す。いま $f(\alpha|x_0, x_1)$ を (y_0, y_1) を用いてかくと

$$f(\alpha|x_0, x_1)=y_1^{r+1}\cdot h(\alpha;y_0, y_1)$$

の形に表される。したがって

$$\begin{aligned} f(\rho_n(\sigma^{-1})\alpha|y_0,\ y_1) &= (\rho_n(\sigma)\rho_n(\sigma^{-1})\alpha|(y_0,\ y_1)\sigma^{-1}) \\ &= f(\alpha|x_0,\ x_1) \\ &= y_1^{r+1}\cdot h(\alpha\ ;\ y_0,\ y_1) \end{aligned}$$

を得る。つまり，これを $\sum_l \binom{n}{l}\beta^{(l)}x_0^{n-l}x_1^{0}$ と書き表すとき $\beta^{(0)}=\cdots=\beta^{(r)}=0$ を示している。それゆえ定数項を持たない重さ p の不変式 $\eta(\xi)$ に対しては $\eta(\alpha)=\det\sigma^{-p}\eta(\rho_n(\sigma)\alpha)=0$ である。つまり，$f(\alpha|x_0,\ x_1)$ は零形式である。(証明終り)

m_1 次および m_2 次の同次多項式

$$G(\alpha\ ;\ x_0,\ x_1)=\sum_l \binom{m_1}{l}\alpha^{(l)}x_0^{m_1-l}x_1^{l},$$

$$H(\beta\ ;\ x_0,\ x_1)=\sum_l \binom{m_2}{l}\beta^{(l)}x_0^{m_2-l}x_1^{l},$$

について，G, H のそれぞれが $G(\alpha\ ;\ x_0,\ 1)=\alpha_0\prod_{i=1}^{m_1}(x_0-u_i)$，$H(\beta\ ;\ x_0,\ 1)=\beta_0\prod_{j=1}^{m_2}(x_0-v_j)$ と分解されるとき

$$R(G,H)=\alpha_0^{m_2}\beta_0^{m_1}\cdot\prod_i\prod_j(u_i-v_j)$$

を $G(\alpha\ ;\ x_0,\ x_1)$ と $H(\beta\ ;\ x_0,\ x_1)$ の終結式という。$G(\alpha\ ;\ x_0,\ 1)=H(\alpha\ ;\ x_0,\ 1)=0$ が共通根をもつことと $R(G,H)=0$ は同値である。さらに，指数 m の共変式：$F(\xi\ ;\ x_0,\ x_1)=\sum_l\binom{m}{l}\alpha^{(l)}(\xi)x_0^{m-l}x_1^{l}$ は Robert の定理より指数 m の半不変式 $\alpha^{(0)}(\xi)$ をもちいて $F(\xi\ ;\ x_0,\ x_1)=\sum_l \Delta^l\alpha^{(0)}(\xi)x_0^{m-l}x_1^{l}/l\,!$ と書けるので

$$\alpha^{(l)}(\xi)=(m-l)\,!\cdot\Delta^l\alpha^{(0)}(\xi)/m\,!$$

である。また，$\mathcal{D}\Delta^l\alpha^{(0)}(\xi)=[\mathcal{D},\ \Delta^l]\alpha^{(0)}(\xi)=l\ (m-l+1)\Delta^{l-1}\alpha^{(0)}$ を用いて半不変式間の以下の関係式を得る：

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\alpha^{(l)}(\xi)=l\alpha^{(l-1)}(\xi),\ \Delta\alpha^{(l)}(\xi) \\ =(m-l)\alpha^{(l+1)}(\xi) \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$F_1(\xi\ ;\ x_0,\ x_1)$，$F_2(\xi\ ;\ x_0,\ x_1)$ をそれぞれ指数が m_1，m_2 の共変式，$f_1(\xi|x_0,\ x_1)$，$f_2(\xi|x_0,\ x_1)$ をそれぞれの m_1，m_2 次形式とする。このとき，$F_i(\xi\ ;\ x_0,\ x_1)=f_i(\alpha_i(\xi)|x_0,\ x_1)$ $(i=1,\ 2)$ である。ところで終結式 $R(f_1,\ f_2)(\xi_1,\ \xi_2)$ は $f_1(\xi_1|x_0,\ x_1)$，$f_2(\xi_2|x_0,\ x_1)$ の同次不変式である。すなわち $\mathcal{D}$，Δ に対応する ξ_i にはたらく作要素 $\mathcal{D}_1$，Δ_i をとれば，

$$(\mathcal{D}_1+\mathcal{D}_2)R(f_1,\ f_2)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{l=1}^{m_i}\frac{\partial R(f_1,\ f_2)}{\partial\xi_i^{(l)}}\cdot\xi_i^{(l+1)}=0,$$

$$\begin{aligned}(\Delta_1+\Delta_2)R(f_1,\ f_2)&=\sum_i\sum_l\frac{\partial R(f_1,\ f_2)}{\partial\xi_i^{(l)}}\cdot(m_i-l)\xi_i^{(l+1)} \\ &=0,\end{aligned}$$

である。これより $R(F_1,\ F_2)(\xi)=R(f_1,\ f_2)(\alpha_1(\xi),\ \alpha_2(\xi))$ に注意して，(4) を用いると

$$\mathcal{D}R(F_1,\ F_2)=0,$$
$$\Delta R(F_1,\ F_2)=0,$$

なることが示される。これより終結式 $R(F_1,\ F_2)$ が SL(2) の下で不変であることになり，$f(\xi|x_0,\ x_1)$ の不変式であるということになる。こうして，

“指数が m_1，m_2 の共変式 $F_1(\xi\ ;\ x_0,\ x_1)$，$F_2(\xi\ ;\ x_0,\ x_1)$ の終結式は不変式である”ことが判った。それでは，n 次形式 $f(\alpha|x_0,\ x_1)$ が零形式であるとき $f(\alpha|x_0,\ x_1)$ は重複度 r+1 以上の 1 次因子を持つであろうか。(ここに r は n/2 を超えない最大の整数である。) 答は YES である。以下にそれを示そう。

$$C_k(\xi)=2\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\binom{2k}{l}\xi^{(l)}\xi^{(2k-l)}+(-1)^k\binom{2k}{k}\xi^{(k)2}$$

$$(k=1,\cdots,\ r)$$

と書くことにする。$C_k(\xi)$ は Sec 2 で定義した $f(\xi|x_0,\ x_1)$ の自身との 2k 次半不変極 $A_{2k}\{f,\ f\}$ そのものであるので，指数が $m_k=2n-2\cdot 2k=2(n-2k)$ の半不変式である。そこで $C_k(\xi)$ に対応する指数が m_k の共変式として

$$\begin{aligned}F_k(\xi\ ;\ x_0,\ x_1)&=x_0^{m_k}\exp(x_1/x_0\cdot\Delta)C_k(\xi) \\ &=\sum_{l=0}^{m_k}\Delta^l C_k(\xi)x_0^{m_k-r}x_1^{l}/l!\end{aligned}$$

を考える。$m_1,\cdots,\ m_r$ の最小公倍数を m，$\lambda_1,\cdots,\ \lambda_r$ を未定係数として

$$\sum_{k=1}^{r}\lambda_k F_k(\xi\ ;\ x_0,\ x_1)^{m/m_k}=U(\xi\ ;\ x_0,\ x_1)$$

なるものを導入すれば U は指数 m の共変式になる。n 次形式 $f(\xi|x_0,\ x_1)$ と U との終結式 $R(f,\ U)(\xi)$ をつくれば前述の通りこれは不変式である。いま，$f(\xi|x_0,\ x_1)$ が零形式であるので，$R(f,\ U)(\xi)$ は定数項は持たないから $R(f,\ U)(\alpha)=0$ である。したがって，$f(\alpha|x_0,\ x_1)$ と $U(\alpha\ ;\ x_0,\ x_1)$ が 1 次因子を共有することになる。$\lambda_1,\cdots,\ \lambda_r$ は未定係

数なのであるから，このことは$f(\alpha|x_0, x_1)$，$F_1(\alpha|x_0, x_1), \cdots, F_r(\alpha; x_0, x_1)$が1次因子を共有することを示している。GL(2)の適切な要素をさようさせれば，その共有1次因子はx_1であるとして一般性をうしなわない。このとき，$f(\alpha|x_0, x_1)$，$F_1(\alpha; x_0, x_1), \cdots, F_r(\alpha; x_0, x_1)$は$x_0$だけの項を持たないので，

$$\alpha^{(0)}=0,\ C_k(\alpha)=0 \quad (1 \leqq k \leqq r)$$

を得る。つまり

$$(-1)^{k+1}/2 \cdot \binom{2k}{k} \alpha_k{}^2 = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \binom{2k}{l} \alpha^{(l)} \alpha^{(2k-l)} \qquad (1 \leqq k \leqq r)$$

である。これで，$\alpha^{(0)}=0$から始めて順次$\alpha^{(1)}=0, \cdots, \alpha^{(r)}=0$がいえる。こうして

$$f(\alpha|x_0, x_1) = x_1{}^{r+1} \cdot g(\alpha; x_0, x_1)$$

と書けることが示された。以上を以下の表現でまとめておこう："n次形式$f(\alpha|x_0, x_1)$が零形式であるための必要十分条件は，$f(\alpha|x_0, x_1)$が重複度$(r+1)$以上の1次因子をもつことである。ただし，$r=[n/2]$."

次には，不変式多様体の具体例を提示することに話題をすすめたい。

参考文献

1) 桜岡　充：群の可解性と準同型写像 I，II，日本歯科大学紀要（一般教育系）**27**，21−26(1998)，30，**23**−27(2001)。

2) 桜岡　充：共変式の環と半不変式の環の同型性　I，II，日本歯科大学紀要（一般教育系）**33**，11−15(2004)，**34**，5−9(2005).

3) J. A. Dieudonne and J. B. Carrell : Invariant Theory, old and new, Academic Press(1970).

4) 森川　寿：不変式論，紀伊国屋書店（1990）.

5) 桜岡　充：Kummer 拡大体と準同型写像群 I，II，日本歯科大学紀要（一般教育系）**31**，25−33(2002)，**32**，5−7(2003)。

6) 永田雅宜：可換体論，裳華房（1967），可換環論，紀伊国屋（1992）。

7) O. Zariski and P. Samuel : Commutative algebra I, II, van Nostrand, New york I (1958), II (1960).

8) M. Nagata : Local rings, John Wiley, (1962).

9) H. Saito : Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, Lectures in Mathematics, Kyoto Univ.(1975).

10) V. W. Guillemin : Infinite dimensional primitive Lie algebra, J. Diff. Geom. **4**, 257−282 (1970).

11) O. Zaiski : Analytical irreducibilty of normal varieties, Ann. Math. **49**, 352−361 (1948).

12) 松村英之：集合論入門，朝倉書店（1992）。