共変式の環と半不変式の環の同型性　II

Isomorphism between Covariant Ring and Semi-invariant Ring　II

新潟歯学部　桜岡　　充

Mitsuru SAKURAOKA

The Nippon Dental University, Hamaura-cho 1-8. Niigata 951-8580, Japan

(2004年11月29日受理)

Abstract

Covariance concept of transformation group is introduced by the fundamentals of linear algebra. Covariance plays a significant role in the wide area of algebraic analysis. Isomorphism between semi-invariant ring and covariant ring are shown by making use of the theory of linear mapping. The transvectant of two covariants will be also derived. It will be shown that the finite dimensional representation of the special Lie ring sl(2) is completely reducible. And the dimension theorem on the representation space of semi-invariant ring is also introduced.

Key Index Words : isomorphism, Lie ring, transvectant.

Sec 3　線形リー環 sl(2) の有限次表現と可約性

体K上のベクトル空間 G に対して積 (a, b) → [a, b] が定義され

$$
\begin{aligned}
&1)\ [\lambda a+\mu b,\ c]=\lambda[a,\ c]+\mu[b,\ c],\\
&2)\ [a,\ a]=0, \qquad\qquad (1)\\
&3)\ [a,[b,\ c]]+[b,[c,\ a]]+[c,[a,\ b]]=0
\end{aligned}
$$

であるとき G は体K上のリー環である。K上のベクトル空間VのV自身への線形写像に，リー積：[A, B]＝AB－BAを加えたものはリー環になるが，これはV上の一般線形リー環とよばれるもので GL(V) とかく。VとしてK上の基底 e_1, e_2, ･･･, e_nをとれば GL(V) は (n, n) 行列全体にリー積を加えたものになる。これを GL(n) あるいは GL(n, K) とかくことにする。GL(n) のなかで trace が零である要素の全体はもちろん部分リー環を構成する。これが n 次特殊線形リー環 sl(n) である。

K上のリー環 G から，Kを含む体 K_0上のベクトル空間V上の一般線形リー環 GL(V) への，恒等的に零でない写像 $\hat\rho$ が

$$
\begin{aligned}
&\hat\rho(\lambda a+\mu b)=\lambda\hat\rho(a)+\mu\hat\rho(b)\\
&\hat\rho([a,\ b])=[\hat\rho(a),\ \hat\rho(b)]
\end{aligned}
$$

を満たすならば，$\hat\rho$ を G の表現，Vをその表現空間とよぶのである。今後表現と表現空間をいっしょに ($\hat\rho$, V) と書くことにする。ベクトル空間Vがn次元の場合n次表現であり，nの有限，無限にしたがってそれぞれ有限次表現，無限次表現と呼ぶ。

ベクトル空間Vの部分空間Wが G の作用で不変であるとき，つまり

$$\hat\rho(a)W\subset W\ \ (a\in G)$$

であるとき，Wを表現 $\hat\rho$ の不変部分空間であるという。$\hat\rho$ をWのみに制限するなら ($\hat\rho$, W) は G の表現でもある。V自身以外に不変部分空間を持たない表現が既約表現である(単純表現と同義)。さらにこのとき表現空間Vが既約であるともいう。表現空間Vが既約である部分空間の直和に分解できる時，$\hat\rho$ は完全可約あるいは半単純である。Vの係数の属する体を代数的閉包まで拡大してもなおベクトル空間Vが既約であるとき，$\hat\rho$ は絶対的既約であるという。

さて，2次の特殊線形リー環 sl(2) の基底として

$$H=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (2)$$

をとれば [X, Y]＝H, [H, X]＝2X, [H, Y]＝－2Y となっている。したがって対応

$$\lambda H+\mu X+\nu Y\rightarrow\lambda\mathscr{H}+\mu\mathscr{D}+\nu\Delta\ \ (\lambda,\ \mu,\ \nu\in K) \qquad (3)$$

は sl(2) の表現を与える事になる。そしてその表現空間は多項式全体のベクトル空間 $K(\xi)$ である。$\mathscr{H}$, $\mathscr{D}$, Δは多項式の次数は変えないので同 d 次多項式がつくる $K(\xi)$ の部分空間は不変部分空間であって，上記の対応のこの不変部分空間への制限は sl(2) の有限次表現をあたえているのである。sl(2) の表現空間 V の零でない要素 v に対して V の係数が属する体中に要素 λ があって

$$\hat{\rho}(H)v=\lambda v \quad \text{かつ} \quad \hat{\rho}(X)v=0$$

であるとき要素 v は原始的である。このとき，

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(H)\hat{\rho}(X)v&=[\hat{\rho}(H),\ \hat{\rho}(X)]v+\hat{\rho}(X)\hat{\rho}(H)v\\&=(\lambda+2)\hat{\rho}(X)v\\ \hat{\rho}(H)\hat{\rho}(Y)v&=[\hat{\rho}(H),\ \hat{\rho}(Y)]v+\hat{\rho}(Y)\hat{\rho}(H)v\\&=(\lambda-2)\hat{\rho}(Y)v\end{aligned}$$

となるので

$$\{\hat{\rho}(H)\hat{\rho}(X)\}v=(\lambda+2l)\hat{\rho}(X)^l v,$$
$$\{\hat{\rho}(X)\hat{\rho}(H)\}^l v=(\lambda-2l)\hat{\rho}(X)^l v \quad (l=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

がなりたつ。ここで sl(2) の表現 $(\hat{\rho},\ V)$ の原始要素 e_0をとり

$$e_l=\hat{\rho}(Y)^l/_l!\cdot e_0\,(e_{-1}=0,\ l=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

とかくと e_lの定義から $\hat{\rho}(H)e_0=\lambda e_0$として

$$\hat{\rho}(H)e_l=(\lambda-2l)e_l,\ \hat{\rho}(Y)e_l=(l+1)e_l$$

であって，$\hat{\rho}(X)e_0=(\lambda-l+1)e_{l-1}$ $(l=0,\ 1,\ 2,\cdots)$ である。なぜなら $l=0$ のときは両辺とも零で自明であり，これが成立すると仮定して $l\rightarrow l+1$ の場合をみると

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(X)e_{l+1}&=\hat{\rho}(X)\hat{\rho}(Y)e_l/(l+1)\\&=([\hat{\rho}(X),\ \hat{\rho}(Y)]e_l+\hat{\rho}(Y)\hat{\rho}(X)e)/(l+1)\\&=((\lambda-2l)+(\lambda-l+1)l)e_l/(l+1)\\&=(\lambda-l)e_l\end{aligned}$$

となるからである。$\hat{\rho}(X)e_l=(\lambda-l+1)e_{l-1}$で $l=m+1$ とすれば

$$\hat{\rho}(X)e_{m+1}=0=(\lambda-m)e_m$$

しかるに，$e_m\neq0$ であるから $\lambda=m$ なのである。こうして，

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(H)e_l=(\lambda-2l)e_l,\ \hat{\rho}(X)e_l\\=(m-l+1)e_{l-1},\ \hat{\rho}(Y)e_l=(l+1)e_{l+1}\end{aligned}\tag{4}$$

となることが示された。それでは，e_0, $e_1,\cdots$, e_mで張られる (m+1) 次元ベクトル空間 W_mをみてみよう。W_mが $(\hat{\rho},\ V)$ の不変部分空間であることは自明である。$\hat{\rho}(H)$ を W_mに制限したときの固有値は m, m−2, m−4,$\cdots$, −m+2, −m であり，それぞれの固有値に対する固有空間はもちろん 1 次元であって，それぞれが e_0, $e_1,\cdots$, e_mで張られるということである。ここで，W_mが可約であるとすると W_mの不変部分空間 U があって，$\hat{\rho}(H)$ の U に制限したときの固有値は {m, m−2, m−4,$\cdots$, −m+2, −m} の部分集合ということになるが，そのうちの最大のものを m−2k とすると e_kは U に属する。しかしながら

$$\hat{\rho}(X)e_k=(m-k+1)e_{k-1},$$
$$\hat{\rho}(H)e_{k-1}=(m-2k+2)e_{k-1}$$

であるから，e_{k-1}も U にぞくすることになり，これに対する $\hat{\rho}(H)$ の固有値が m−2k より大きくなってしまう。よって，$e_k=e_0$, $U=W_m$を得る。つまり，W_mは既約不変部分空間なのである。つぎに，(m+1) 次元ベクトル空間 W_mの基底 e_0, $e_1,\cdots$, e_mに対する H, X, Y の作用を

$$\begin{aligned}&1)\quad \hat{\rho}_m(H)e_l=(m-2l)e_l,\\&2)\quad \hat{\rho}_m(X)e_l=(m-l+1)e_{l-1},\\&3)\quad \hat{\rho}_m(Y)e_l=(l+1)e_{l+1}\,(e_{-1}=e_{m+1}=0,\ 0\leqq l\leqq m)\end{aligned}\tag{5}$$

で定めればすぐに解るように $(\rho_m,\ W_m)$ は sl(2) の絶対既約表現をあたえる。

つぎに，表現空間 V の係数体を代数的閉体まで拡張した場合について，

$\hat{\rho}(H)$ の固有値 λ_0に対する固有ベクトル v をとれば

$$\hat{\rho}(H)\cdot\hat{\rho}(X)v=(\lambda+2l)\rho(X)v$$

となるので v, $\hat{\rho}(X)v$, $\hat{\rho}(X)^2v,\cdots$, は 1 次独立である。したがって $\hat{\rho}(X)^k v\neq0$, $\hat{\rho}(X)^{k+1}v=0$ となる k が存在する。それゆえ $\hat{\rho}(X)^k v=e_0$とおけばこの e_0は原始要素になる。それゆえ $e_l=\hat{\rho}(Y)^l e_0/l!$ $(l=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ とかけば $\{e_0,\ e_1,\cdots,\ e_n\}$ $(1\leqq n\leqq m)$ で張られる空間が不変部分空間となるような n が存在する。$\hat{\rho}(H)$ をそこに制限したとき，その固有値は {n, n−2, n−4,$\cdots$, −n} である。このことは，なにも V の係数体を閉体にまで拡大しなくとも e_0, $e_1,\cdots$, e_nを適切に選んで上記のような不変部分空間を V 内につくりうることを示している。そして，V は既約であったのだから，$e_0,\cdots$, e_nは V を張ることになる。つまり m=n であり $(\hat{\rho},\ V)$ は $(\hat{\rho}_m,\ W_m)$ と同値になる。また $\{e^{(1)},\cdots,\ e^{(r)}\}$ なる sl(2) の有限次表現 $(\hat{\rho},\ V)$ の 1 次独立な原始要素の集合をとり，それぞれの要素に対して

$$\hat{\rho}(Y)^{m(i)}e^{(i)}\neq0,\ \hat{\rho}(Y)^{m(i)+1}e^{(i)}=0$$

となる整数 m(i) をとって

$$e_{l(i)}{}^{(i)}=\hat{\rho}(Y)^{l(i)}e^{(i)}/l(i)!\quad (0\leqq l(i)\leqq m(i),\ 1\leqq i\leqq r)$$

を定義すれば $e_{l(i)}{}^{(i)}(0\leqq l(i)\leqq m(i),\ 1\leqq i\leqq r)$ は 1 次独立である。

つぎに，sl(2) の有限次表現 $(\hat{\rho},\ V)$ の原始要素 $e^{(i)}$を含む最小の不変部分空間を W と書くとき，商ベクトル空間 V/W を眺めよう。V/W の原始要素 e^*とかく：

$$\hat{\rho}(Y)^{m(1)}e^{(1)}\neq0,\ \hat{\rho}(Y)^{m(1)+1}e^{(1)}=0,\ \hat{\rho}(Y)^{m+1}e^*\neq0,$$
$$\hat{\rho}(Y)^{m+1}e^*=0$$

$e_l{}^{(1)}=\hat{\rho}(Y)^l e^{(1)}/l!$ $(0\leqq l\leqq m(1))$ とかくと，W は $e_0{}^{(1)},\cdots,$

$e_{m(1)}{}^{(1)}$で張られる。よってe^*の代表要素 v をとれば

$$\hat{\rho}(H)v=mv+\sum_{l=0}^{m(1)}\lambda_l e_l{}^{(1)},\quad \hat{\rho}(X)v=\sum_{l=0}^{m(1)}\mu_l e_l{}^{(1)}$$

とかける。ここで，$\hat{\rho}(X)_{l+1}{}^{(1)}e=(m(1)-l)e_l{}^{(1)}$であるから

$$u=v-\sum_{k=0}^{m(1)-1}\frac{\mu_k}{m(1)-k}e_{k+1}{}^{(1)}$$

$$\therefore \hat{\rho}(X)u=\sum_{l=0}^{m(1)}\mu_l e_l{}^{(1)}-\sum_{k=0}^{m(1)-1}\mu_k e_k{}^{(1)}=\mu_{m(1)}e_{m(1)}{}^{(1)}$$

となるので

$$\hat{\rho}(H)u=mu+\sum_{l=0}^{m(1)}\nu_l e_l{}^{(1)},\quad \hat{\rho}(X)u=\mu e_{m(1)}{}^{(1)}$$

を得る。この関係式は

$$2\mu e_{m(1)}{}^{(1)}=2\hat{\rho}(X)u=[\hat{\rho}(H),\ \hat{\rho}(X)]u$$
$$=\mu\hat{\rho}(H)e_{m(1)}{}^{(1)}-\hat{\rho}(X)\left(mu-\sum_{l=0}^{m(1)}\nu_l e_l{}^{(1)}\right)$$

なので，$(2+m(1)+m)\mu=0$，$\nu_1=\nu_2=\cdots=\nu_{m(1)}=0$，かつ $2+m(1)+m\neq 0$ から $\mu=0$ であることが分り

$$\hat{\rho}(H)u=mu+\nu_0 e^{(1)},\quad \hat{\rho}(X)u=0 \qquad (6)$$

ここで，まず $m\neq m(1)$ の場合は

$$e=u+\nu_0\cdot e^{(1)}/(m-m(1))$$

とおけば，

$$\hat{\rho}(H)e=\hat{\rho}(H)u+\nu_0\cdot\hat{\rho}(H)e^{(1)}/(m-m(1))$$
$$=\nu_0\cdot e^{(1)}+\nu m(1)e^{(1)}/(m-m(1))$$
$$=me-\nu_0 me^{(1)}/(m-m(1))+\nu_0\cdot e^{(1)}+\nu_0 m(1)e^{(1)}/(m-m(1))$$
$$=me$$

であるので，e は原始要素であってe^*の代表要素であることになる。さらに $m=m(1)$ のときは u 自身が原始要素になっている。これを示す。最初に

$$\hat{\rho}(H)\hat{\rho}(Y)^l u=(m-2l)\hat{\rho}(Y)^l u+\nu_0\cdot\hat{\rho}(Y)^l e^{(1)} \qquad (7)$$

である。なぜなら，$l=0$ のときは明らかなので，上式を仮定し $l+1$ のときをみると

$$\hat{\rho}(H)\hat{\rho}(Y)^{l+1}u=[\hat{\rho}(H),\ \hat{\rho}(Y)]\hat{\rho}(Y)^l u+\hat{\rho}(Y)\hat{\rho}(H)\hat{\rho}(Y)^l u$$
$$=-2\hat{\rho}(Y)^{l+1}u+(m-2l)\hat{\rho}(Y)^{l+1}u+\nu_0\hat{\rho}(Y)^{l+1}e$$
$$=\{m-2(l+1)\}\hat{\rho}(Y)^{l+1}u+\nu_0\cdot\hat{\rho}(Y)^{l+1}e$$

となるからである。(7) で，いま $m=m(1)$ であるが，$l=m+1$ とすれば

$$\hat{\rho}(H)\hat{\rho}(Y)^{m+1}u=\{m-2(m+1)\}\hat{\rho}(Y)^{m+1}u$$
$$+\nu_0\cdot\hat{\rho}(Y)^{m+1}e^{(1)}$$
$$=(m+2)\hat{\rho}(Y)^{m+1}u$$

がえられる。$\hat{\rho}(H)$ を W 上に制限すれば，その固有値は m, $m-2,\cdots,-m+2,-m$ であり $\hat{\rho}(Y)^{m+1}u$ は W の要素だから 0。ゆえに

$$0=\hat{\rho}(X)\hat{\rho}(Y)^{m+1}u=\sum_{l=0}^{m}\hat{\rho}(Y)^{m-l}\hat{\rho}(H)\hat{\rho}(Y)^l u$$
$$=\sum_{l=0}^{m}(m-2l)\hat{\rho}(Y)^m u+\nu_0\cdot\sum_{l=0}^{m}\hat{\rho}(Y)^{m-l}\hat{\rho}(Y)^l e^{(1)}$$
$$=\{m(m+1)-2\sum_{l=0}^{m}l\}\hat{\rho}(Y)^m u+(m+1)\nu_0\cdot\hat{\rho}(Y)^m e^{(1)}$$
$$=(m+1)\nu_0\cdot\hat{\rho}(Y)^m e^{(1)}$$

こうして，$\nu_0=0$ が示される。つまり (6) で u は原始要素なのである。こうして sl(2) の有限次表現 $(\hat{\rho},\ V)$ の原始要素 $e^{(1)}$を含む最小の不変部分空間を W と書くとき，商ベクトル空間 V/W の原始要素の代表要素は $(\hat{\rho},\ V)$ の原始要素から構成することができる。つぎには，sl(2) の表現に関する特性を考察することになる：

(表現の可約性定理)sl(2) の有限次表現は完全可約である。したがって，つねに $(\hat{\rho}_1,\ W_1)$，$(\hat{\rho}_2,\ W_2)$，$(\hat{\rho}_3,\ W_3)$，$\cdots$ の直和と同値である。

[証明] sl(2) の有限次表現 $(\hat{\rho},\ V)$ の 1 次独立な原始要素の極大集合を $\{e^{(i)}|i=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ r\}$ で表すことにする。各原始要素 $e^{(i)}$に対して，

$$\hat{\rho}(Y)^{m(i)}e^{(i)}\neq 0,\quad \hat{\rho}(Y)^{m(i)+1}e^{(i)}=0$$

である自然数 m(i) をとり

$$e_{l(i)}{}^{(i)}=\hat{\rho}(Y)^{l(i)}e^{(i)}/l(i)!\quad (0\leq l(i)\leq m(i),\ 1\leq i\leq r)$$

を作るとき $\{e_{l(i)}{}^{(i)}|i=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ r\}$ で張られる部分空間 W_iで表せば，これらの直和

$$W_1\oplus W_2\oplus W_3\oplus\cdots\oplus W_r$$

は V の不変部分空間であって，(5) により $\hat{\rho}$ のW_iへの制限 $(\hat{\rho},\ W_i)$ は $(\hat{\rho}_{m(i)},\ W_{m(i)})$ と同値である。したがって，V の任意の要素が原始要素とそれに $\hat{\rho}(Y)$ を何度か作用させたものの 1 次結合として表現できることを示せば十分である。ここでは表現空間 V の次元についての帰納法で示す。dim(V)＝2 の場合は既約であるし $(\hat{\rho}_1,\ W_1)$ と同値は明らかである。いまの表現空間 V より次元の低い場合に成立すると仮定する。V/W_1の 1 次独立な原始要素の極大集合を $\{h^{(i)}|i=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ s\}$ とすると，このそれぞれの $h^{(i)}$の代表要素として原始要素 $f^{(i)}$を構成できる。帰納法の仮定によって V/W_1の要素は $\{h^{(i)}|i=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ s\}$ に $\hat{\rho}(Y)$ を何度か作用させた要素の和で表現できる訳だから，V の任意の要素が

$f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ･･･, $f^{(s)}$, $e^{(1)}$に $\hat{\rho}(Y)$ を何度か作用させた要素を和で表現される事になる。（証明終り）

Sec 4 共変式環の生成系と Cayley−Sylvester の個数定理

$K[\xi]=K[\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(n)}]$ 内の d 同次 p 同重多項式全体は K 上のベクトル空間を構成するので，このベクトル空間を V(n, d, p) で表し，V(n, d, p) の次元関数 dimV (n, d, p) の母関数を $\phi(x, z)$ とかく：

$$\phi(x, z)=\sum_{d,p=0}^{\infty}\{\dim V(n, d, p)\}\cdot x^p z^d$$

ところで，dimV(n, d, p) は

$$\sum_{l=0}^{n} d_l=d, \quad \sum_{l=0}^{n} l\cdot d_l=p$$

なる連立方程式の負でない整数解の個数であるので

$$\phi(x, z)=1/\{(1-z)\cdot(1-xz)\cdots(1-x^n z)\}$$

で与えることができることは容易にわかる。そこで，$\phi(x, z)$ を z についての整級数と見たときの z^dの係数を $\phi_d(x)$ は

$$\begin{aligned}\phi_d(x)&=\sum_{p=0}^{\infty}\{\dim V(n, d, p)\}\cdot x^p,\\ \phi_d(x)&=\{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\cdots(1-x^{n+d})\}/\{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^d)\}\end{aligned} \tag{8}$$

で与えられる。つぎに正の整数 m に対する (n, m, p)−共変式：$\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}c_l(\xi)z$ を考える。Robert の定理より

$$\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}c_l(\xi)z=\exp(z\Delta)c_0(\xi)=\sum_{l=0}^{m}z^l\Delta c_0(\xi)/l\,!$$

なので $c_0(\xi)=\Delta c_0(\xi)/l\,!$ $(0\leqq l\leqq m)$ である。そこで $c_0(\xi)$ が (d, p)−半不変式 (d は m=nd−2p を満たす正整数) であることから

$$\mathscr{H}\, c_0(\xi)=m\cdot c_0(\xi)$$

$$\mathscr{H}\left\{\binom{m}{l}c_l(\xi)\right\}=(m-2l)\binom{m}{l}c_l(\xi) \tag{9}$$

$$\Delta\left\{\binom{m}{l}c_l(\xi)\right\}=(l+1)\binom{m}{l+1}c_{l+1}(\xi)$$

が得られる。さらに共変式の性質から

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}\left\{\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}c_l(\xi)\cdot z^l\right\}\\ &=\partial_t\left\{\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}c_l[\rho_n\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}\xi]z^l\right\}\Big|_{t=0}\\ &=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(m-l)c_l(\xi)z^{l+1}\end{aligned}$$

つまり

$$\mathscr{D}\left\{\binom{m}{l}c_l(\xi)\right\}=(m-l+1)\binom{m}{l-1}c_{l-1}(\xi) \tag{10}$$

も得られる。それゆえ

$$\{e_0, e_1, \cdots, e_m\};\ e_l=\binom{m}{l}c_l(\xi)\ \ (0\leqq l\leqq m) \tag{11}$$

は (5) の性質をもち sl(2) の既約表現 $(\hat{\rho}_m, W_m)$ の標準基底を与えることがわかる。$K[\xi]=K[\xi^{(0)}, \xi^{(1)}\cdots, \xi^{(n)}]$ 内の d 同次 多項式全体がつくる sl(2) の表現空間 V(n, d) の原始要素は $\mathscr{D}\,\phi(\xi)=0$, $\mathscr{H}\,\phi(\xi)=m\cdot\phi(\xi)$ を満足する V(n, d) の要素の中から定義されるわけだから，(m+1) 次元の既約な表現空間を張ることになるが，これは上記の原始要素 e_lすべてで張られることになる：

$$\bigoplus_p C(d, p)-\{0\}\ \ (p=(nd-m)/2) \tag{12}$$

そして，半不変式空間の次元は次のように決まる：
"(d, p)−半不変式空間 C_n(d, p) の次元は

$$\{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\cdots(1-x^{n+d})\}/\{(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^d)\} \tag{13}$$

を x の整級数として展開したときの x^pの係数にほかならない。(Caylay−Sylvester の個数定理)"

［証明］V(n, d) の原始要素全体は (12) なのであるから 1 次独立な原始要素の極大集合 $\{\phi_1, \cdots, \phi_r\}$ は明らかに

$$\bigcup_p C_n(d, p)$$

中から選び出すことができる。よって表現の可約性定理から

$$V(n, d, p)=\bigoplus_{0\leq l\leq p}\Delta^l C_n(d, p-l),$$

$$V(n, d)=\bigoplus_{0\leq p\leq nd/2}\cdot\bigoplus_{0\leq l\leq p}\Delta^l C_n(d, p-l).$$

であることが分る。ところで

$$\dim\Delta^l C_n(d, p)=\dim C_n(d, p)\ [0\leqq l\leqq nd-2p],\quad 0\ [nd-2p<l]$$

であるので，$1\leqq 2l\leqq nd-2p+2l=nd-2(p-l)$ に注意して $\dim V(n, d, p)=\sum_{l=0}^{p}\dim\Delta^l C_n(d, p-l)=\sum_{l=0}^{p}\dim\Delta^l C_n(d, p-l)$ $[0\leqq l\leqq nd-2p]$。よって

$$\begin{aligned}\dim C_n(d, p)&=\dim V(n, d, p)-\dim V(n, d, p-1)\\ &=\{\phi_d(x)\text{ の } x^p\text{の係数}\}-\{x\phi_d(x)\text{ の } x^p\text{の係数}\}\\ &=\{(1-x)\phi_d(x)\text{ の } x^p\text{の係数}\}\\ &=[\{(1-x^{n+1})\cdots(1-x^{n+d})\}/\{(1-x^2)\cdots(1-x^d)\}\text{の } x^p\text{の係数}]\end{aligned}$$

（証明終り）

なお，

$$\{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\cdots(1-x^{n+d})\}/\{(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^d)\}$$

$$=\{(1-x^{d+1})(1-x^{d+2})\cdots(1-x^{d+n})\}$$
$$/\{(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n)\},$$

つまり，$n\Leftrightarrow d$ で母関数自体が不変なことから

$$\dim C_n(d,\ p)=\dim C_d(n,\ p)$$

が成立する。(Hermite の規則) つぎには不変式環が K 上有限生成であることをみることになる。

参考文献

1) 桜岡　充：群の可解性と準同型写像 I，II，日本歯科大学紀要（一般教育系）**27**，21-26(1998)，**30**，23-27(2001)。
2) 桜岡　充：共変式の環と半不変式の環の同型性，日本歯科大学紀要（一般教育系）**33**，11-15(2004)。
3) J.A. Dieudonne and J.B. Carrell：Invariant Theory, old and new, Academic Press(1970).
4) 森川　寿：不変式論，紀伊国屋書店(1990)。
5) 桜岡　充：Kummer 拡大体と準同型写像群 I，II，日本歯科大学紀要（一般教育系）**31**，25－33(2002)，**32**，5-7(2003)。
6) 永田雅宜：可換体論，裳華房（1967），可換環論，紀伊国屋(1992)。
7) O. Zariski and P. Samuel：Commutative algebra I, II, van Nostrand, New york I (1958), II (1960).
8) M. Nagata：Local rings, John Wiley, (1962).
9) H. Saito：Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, Lectures in Mathematics, Kyoto Univ.(1975).
10) V. W. Guillemin：Infinite dimensional primitive Lie algebra, J. Diff. Geom. **4**, 257-282(1970).
11) O. Zaiski：Analytical irreducibilty of normal varieties, Ann. Math. **49**, 352-361(1948).
12) 松村英之：集合論入門，朝倉書店(1992)