群の可解性と準同型写像II

A Study on the Relations between the Solvable Groups and the Homomorphic Mappings II

新潟歯学部　桜　岡　　充

Mitsuru SAKURAOKA
The Nippon Dental University, Hamaura-cho 1—8,
Niigata 951-8580, JAPAN

(2000年11月24日　受理)

Abstract

The concept of solvability of a group is introduced in terms of the sequence of normal subgroups. Two theorems of the solvability will be proved by making use of homomorphic mapping in linear topological space : 1. The group which has the order of a power of the prime number is solvable.　2. The symmetric group S_n $(n \geqq 5)$ is insolvable.

§1．可解群の部分群およびその準同型写像による像の可解性

この小論では群の可解性に関する定理を線形代数学の準同型写像および正規部分群の概念のみを用いて証明することが目的である。G, G′を群とするときGからG′内への写像λをかんがえる。任意のσ, $\tau \in G$に対して$\lambda(\sigma\cdot\tau)=\lambda(\sigma)\cdot\lambda(\tau)$であるとき，$\lambda$はGからG′内への準同型写像である。このとき$\lambda(\sigma^{-1})=[\lambda(\sigma)]^{-1}$である。ここでは群間の写像として準同型写像のみを取り扱うことにする。

Q' が G' の正規部分であるとき $Q=\lambda^{-1}(Q')$ は G の正規部分群である。なぜなら $\sigma\in G$, $\tau\in Q$ に対して

$$\lambda(\sigma\cdot\tau\cdot\sigma^{-1})=\lambda(\sigma)\cdot\lambda(\tau)\cdot\lambda(\sigma)^{-1}\in\lambda(\sigma)Q'[\lambda(\sigma)]^{-1}=Q$$

なので $\sigma\cdot\tau\cdot\sigma^{-1}\in Q$ となるからである。同様にして G の正規部分群の像 P の像 P' は G' の正規部分群である。

部分群 Q が G の正規部分群であるとき G から商群 G/Q の上への写像を $\lambda(\sigma)=\sigma Q$ で定めると，σ, $\tau\in G$ に対して

$$\lambda(\sigma\cdot\tau)=\sigma\tau Q=\sigma Q\cdot\tau Q=\lambda(\sigma)\cdot\lambda(\tau)$$

より λ は準同型写像である。G/Q の単位元である剰余類 Q はその逆像とも等しいのであるから，この写像の核でもある。つまりこの写像は G から G/Q の上への自然準同型写像なのである。

群 G の可解性はその正規部分群の列 G, G_1, G_2, ……, $G_n=1$ を商群 G_{k-1}/G_k $(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$ が Abel 群になるようとれることである。Q が G の正規部分群であるなら G の任意の部分群 V に対して $V\cap Q$ は V の正規部分群であって $V/(V\cap Q)$ と $(\bigcup_{\sigma\in V}\sigma Q)/Q$ とは同型である。G が可解であるとき，$V_k=V\cap G_k$ と書くと $V=V_0\supset V_1\supset V_2\supset\cdots\cdots\supset V_n=1$ であって

$$V_{k-1}\cap G_k=(V\cap G_{k-1})\cap G_k=V\cap(G_{k-1}\cap G_k)=V\cap G_k=V_k$$

であるので，$V_{k-1}\cap G_k=V_k$ は V_{k-1} の正規部分群であって V_k $(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$ は正規部分群列である。さらに G_{k-1}/G_k は Abel 群なので $V_{k-1}/(V_{k-1}\cap G_k)=V_{k-1}/V_k$ は Abel 群である。よって G の部分群 V は正規部分群の列をもちその商群が Abel 群となって可解であることになる。つまり可解群の任意の部分群は可解なのである。

つぎに，ある可解群 G に対してその G に属する正規部分群の列 G_k $(k=1, 2, \cdots\cdots, n : G_n=1)$ を考える。λ を任意の準同型写像とするとき $\lambda(G)=G'$ であるとする。このとき λ を G_{k-1} に限定して考えると $\sigma'\in G'_{k-1}$, $\tau'\in G'_k$ に対し $\lambda(\sigma)=\sigma'$, $\lambda(\tau)=\tau'$ を満たす σ $(\in G_{k-1})$, τ $(\in G_k)$ は必ず存在する。G_k は G_{k-1} の正規部分群なのであるから $\sigma\tau\sigma^{-1}\in G_k$ である。これを λ で写像すれば $\sigma'\tau'\sigma'^{-1}\in G'_k$ となり G'_k は G'_{k-1} の正規部分群であることが解る。G の任意の正規部分群 Q, 準同型写像 μ に対し $G'=\mu(G)$, $Q'=\mu(Q)$ とすれば，常に G/Q から G'/Q' 上への準同型写像は定義できるので，準同型写像 λ に対して G_{k-1}/G_k から G'_{k-1}/G'_k 上への自然準同型写像：

$$\xi(\sigma G_k)=\lambda(\sigma)G'_k$$

が定義できる。いま G_{k-1}/G_k は Abel 群であるので，G'_{k-1}/G'_k は Abel 群である。よって可解群の準同型な像は可解群である。

§2．位数が素数の整数乗である群の可解性

群Gの要素α，βに対して$\xi\alpha\xi^{-1}=\beta$を満たす$\xi\in G$が存在するとき，要素α，βは共役である。すべての要素は自身と共役であり，αとβ，βとγが共役ならαとγは共役である。そこでGの要素を，互いに共役な要素をまとめて類別してやると，相異なる類の要素は互いに非共役であって，Gのすべての要素はいずれかの類に重複することなく分配される。このような類のなかには唯1個の要素αからなるものもある。これが実現するのはすべての$\xi\in G$に対して$\xi\alpha\xi^{-1}=\alpha$となること，つまりすべての$\xi\in G$に対し$\xi\alpha=\alpha\xi$（可換）ということである。このような要素αすべての集合Zを考えるとσ，$\tau\in Z$にたいして，$(\sigma\cdot\tau)$もGと可換であり，また$\xi\in G$のとき$\sigma\xi^{-1}=\xi^{-1}\sigma$なので$\xi\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\xi$よって$\sigma^{-1}\in Z$であってZはGのAbel部分群である。ZはGの中心と呼ばれる部分群でありGと可換なのであるから正規部分群である。

次に$\alpha\in G$が属する互いに共役な類を得るには$\xi\alpha\xi^{-1}$においてξとしてG全体を動かして相異なるものを求めてゆくことになる。このときξ，ηが同じ要素をあたえる：$\xi\alpha\xi^{-1}=\eta\alpha\eta^{-1}$であるときは左より$\eta^{-1}$，右より$\xi$を掛けて$(\eta^{-1}\cdot\xi)\cdot\alpha=\alpha(\eta^{-1}\cdot\xi)$が得られ，$\alpha$は$(\eta^{-1}\cdot\xi)$と可換である。そこで$\alpha$と可換なGの要素全部の集合を$Q_\alpha$とすると$(\eta^{-1}\cdot\xi)\in Q_\alpha$，つまり$\xi=\eta Q_\alpha$となっている。さらに$\mu$，$\nu\in Q_\alpha$で$\mu\cdot\nu\cdot\alpha=\mu\cdot\alpha\cdot\nu=\alpha\cdot\mu\cdot\nu\therefore\mu\cdot\nu\in Q_\alpha$，$\mu\alpha=\alpha\mu\rightarrow\alpha=\mu^{-1}\alpha\mu\rightarrow\alpha\mu^{-1}=\mu^{-1}\alpha\therefore\mu^{-1}\in Q_\alpha$より$Q_\alpha$はGの部分群である。こうして剰余類$\eta Q_\alpha$の要素は$\alpha$をこれと共役な要素に写すものであることが解る。$Q\alpha$と異なる剰余類に属するものは異なる共役を与える。$\alpha$の相異なる共役の個数［$=\alpha$が属する共役類の要素数］は，$Q_\alpha$の剰余類の個数そのものである。$\alpha$がGの中心Zに属さないなら$\alpha$の共役類の要素数はGの位数の1でない約数となる。

ここでGの位数をnとする。上記により各共役類に属する要素の個数はnの約数でありその全体はGなので各共役類に属する要素の個数の総和はnである。中心の位数をcとすると

$$n=c+m_1+m_2+\cdots\cdots$$

である。ここにm_iは1と異なるnの約数である。ある素数pに対して$n=p^r$である場合を考える。nとm_1，m_2，……はすべてpで割り切れるのでcはpで割り切れなければならない。このことはGの中心Zが1以外にも要素をもつ部分群であることを意味している。

定理3．素数も含めその整数乗の位数をもつ群は可解である。

［証明］群の位数についての帰納法をもちいる。まず位数が１の群はAbel群であり可解である。商群G／Zは,Zが自明でない部分群なのでnより小さい素数の整数乗の位数をもつのでこの可解性を仮定する。この可解性を保証するG／Zの正規部分群列をG_i／Zとする。このときθをG_{i-1}からG_{i-1}/Z上への自然準同型写像とする。［ここにG_{i-1}／Zの要素である剰余類（：Z，σZ，τZ，……）全体からその類枠を取り去った集合Bは，σZとτZの任意要素同志の積が$\sigma\tau Z$に属するのでBに属し$\sigma^{-1}Z$もBに入るので，群でありこれがG_{i-1}である。］G_i／Z＝Q′はG_{i-1}／Zの正規部分群なのでG_{i-1}／ZはG_i／Zを法とする可換商群をもつ。そのθによる逆像をG_iとするならG_iはG_{i-1}の正規部分群であって，そのθによる像がQ′なのである。したがって，G_{i-1}／G_iはG_{i-1}／ZのG_i／Zを法とする商群と同型であることになり，可換群である。G_iの列の最後はZであるがZはAbel群なので，この列の後にさらに１を付け足してGの可解性を保証する部分群の減少列が得られる。(証明終)

Gの位数がp^rでない場合は中心Zの位数が１の場合もあり一般に降鎖列を構成し得ない。

次に対称群を問題にする。Mを有限集合とするときMの上への１対１の写像が置換である。Mの置換は群をつくる。Mの要素の個数をnとするときこの群はn個の要素の対称群と呼ばれS_nで表される。この群の位数はn個の順列であり,n！である。S_nの部分群が置換群である。

a, b, cがMの互いに異なる要素であるとき，aをbに，bをcに，cをaに写像し，Mのこれ以外の要素を固定したままにしておく置換を３次の循環置換とよび(a，b，c)で表すことにする。もちろん$(a, b, c)^{-1}=(c, b, a)$である。ここで４次の対称群S_4をかんがえる。４次の交代群は位数12であり

$E_4=\{1,\ (a, b, c),\ (a, b)\cdot(c, d)\}$

はS_4の正規部分群である。つぎに，$F_4=\{1,\ (a, b)\cdot(c\cdot d)\}$をとると これは位数が４のAbel群であり$E_4$の正規部分群になっている。よって，$S_4\supset E_4\supset F_4\supset\{1\}$なる正規部分群の減少列が存在し対称群$S_4$は可解である。次に，n≧５のときの対称群$S_n$を問題にする。５個以上の要素の集合Mの置換で３次の循環置換をすべてもつ置換群Gの正規部分群Nで可換商群G／Nを持つものを考えよう。θをGからG／Nの上への自然準同型写像，(a，b，c)を３次の循環置換とする。Mのなかからa，b，c以外の要素d，eがとれる。このとき，$\xi=(d, b, a)$，$\eta=(a, e, c)$と書きこれらのθによる像をξ'，η'とするとき$\xi^{-1}\eta^{-1}\xi\eta$のθによる像は$\xi'^{-1}\eta'^{-1}\xi'\eta'$である。ところが像は可換群なのであるから$\xi'^{-1}\eta'^{-1}\xi'\eta'$は１である。よって$\xi^{-1}\eta^{-1}\xi\eta$は$\theta$の核Nに属する。さらに

$$N \ni \xi^{-1}\eta^{-1}\xi\eta = (a,\ b,\ d)(c,\ e,\ a)(d,\ b,\ a)(a,\ e,\ c) = (a,\ b,\ c)$$

が得られ N は 3 次の循環置換をすべて含む。したがって，S_nにはじまり可換な商群をもつ正規部分群の降鎖列があったとする。S_nは 3 次の循環置換をすべて含むので，この正規部分群の降鎖列のおのおのは 3 次の循環置換を全部含むことになる。よって，この降鎖列は群 1 で終ることはない。こうして S_n（$n \geqq 5$）は可解ではあり得ないことが解る：

定理 4．対称群 S_nは $n \geqq 5$ のとき非可解である。

参考文献

1）C. Chevalley：Theory of Lie group I，Princeton Univ. Press, 1946.

2）川久保勝夫：変換群論，岩波書店，1987.

3）H. Ohmori：Homomorphic images of Lie group, J. Math. Soc. Japan **18**, 1966.

4）E. Calabi：On differentiable sctions of compact Lie groups on manifolds, Proc. Conf. on Transformation group, Springer, 1968.

5）佐野一郎：線形代数学，裳華房，1976.

6）J.F. Adams：Lie groups, Benjamin, 1965.

7）桜岡　充：群の可解性と準同型写像，日本歯科大学紀要（一般教育系）**27**, 21（1998）.