群の可解性と準同型写像

A Study on the Relations between the Solvable Groups and the Homomorphic Mappings

新潟歯学部　桜　岡　　充

Mitsuru SAKURAOKA : The Nippon Dental University, Hamaura-cho 1—8, Niigata 951, Japan

(1997 年 11 月 27 日　受理)

Abstract

The concept of solvability of a group is introduced in terms of the sequence of normal subgroups. The fundamental theorems of the solvability will be proved by making use of homomorphic mapping in linear topological space.

§1. 群および写像に関する準備

この小論では群の可解性に関する定理を線形代数学の準同型写像および正規部分群の概念のみを用いて証明するのが目的である。

G，G′を群とするときGからG′内への写像 λ を考える。任意の σ，$\tau \in G$ に対して $\lambda(\sigma\tau)=\lambda(\sigma)\cdot\lambda(\tau)$ であるとき λ はGからG′内への準同型写像である。このとき $\lambda(\sigma^{-1})=[\lambda(\sigma)]^{-1}$ は自明であろう。この小論では群間の写像としては準同型写像のみを扱うことにする。

Q′がG′の部分群であるとき $Q=\lambda^{-1}(Q')$ はGの部分群である。なぜなら σ，$\tau \in Q$ に

対して $\lambda(\sigma)$，$\lambda(\tau) \in Q$ であるので $\lambda(\sigma\tau)=\lambda(\sigma)\cdot\lambda(\tau) \in Q'$ より

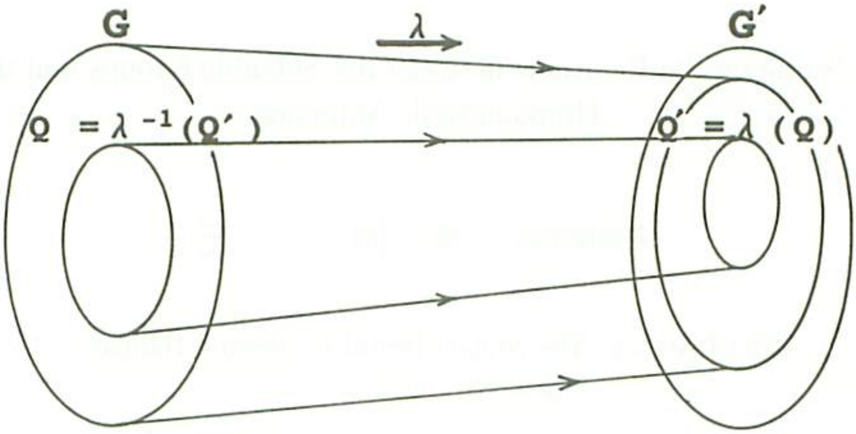

図1　$Q'=G'$ のとき　$Q=\lambda^{-1}(Q')\subset G$.

$\sigma\tau \in Q$ となる。また $\sigma \in Q$ のとき $\lambda(\sigma\sigma^{-1})=\lambda(1)=1$　より $\sigma^{-1}\in Q$ だからである。
Q' が G' の正規部分群のとき $\sigma \in G$，$\tau \in Q$ に対して

$$\lambda(\sigma\tau\sigma^{-1})=\lambda(\sigma)\lambda(\tau)\lambda(\sigma)^{-1}\in \lambda(\sigma)Q'[\lambda(\sigma)]^{-1}=Q'$$

なので $\sigma\tau\sigma^{-1}\in Q$。　つまりQはGの正規部分群となっている。
同様にしてGの部分群Pの像 P' は G' の部分群である。

次に λ がGの G' の上への写像であって，QがGの正規部分群である場合 Q' は G' の正規部分群である。なぜならば $\sigma'\in G'$，$\tau'\in Q'$ に対して $\lambda(\sigma)=\sigma'$，$\lambda(\tau)=\tau'$ を満たす $\sigma \in G$，$\tau \in Q$ は必ず存在し，$\sigma\tau\sigma^{-1}\in Q$ は自明であるので，これを λ で写像すれば $\sigma'\tau'\sigma'^{-1}\in Q$ となるからである。

写像 λ での像が G' の単位要素となるようなGの要素全体の集合が写像 λ の核Kであるがこれは G' の単位要素が G' の正規部分群であることよりGの正規部分群であることが解る。

ここで写像 λ によって同一の像を持つGの要素 σ，τ をみる：$\lambda(\sigma)=\lambda(\tau)$。

$$\lambda(\sigma)\cdot[\lambda(\tau)]^{-1}=\lambda(\sigma\tau^{-1})=1 \therefore \sigma\tau^{-1}\in K$$

$$\sigma \in K\ \tau=\sigma K \quad [\text{KはGの正規部分群}]$$

となる。つまりKを法とする各剰余類の要素はそれぞれ同じ像をもつのである。

そこで各剰余類σ Kに，その剰余類の要素の像$\lambda(\sigma)\in\lambda(G)$を対応させる写像を考えると$\sigma$，$\tau\in G$が別の剰余類に属するときはその像が自動的に異なっているのであるからこの写像は商群G／KからGの像$\lambda(G)$の上への１：１の写像になっている。この写像をηとかくと$\eta(\sigma K)=\lambda(\sigma)$なので

$$\eta(\sigma K\cdot\sigma' K)=\eta(\sigma\sigma' K)=\lambda(\sigma\sigma')=\lambda(\sigma)\cdot\lambda(\sigma')$$
$$=\eta(\sigma K)\eta(\sigma' K)。$$

つまり　写像ηは準同型写像でもあるので，この写像はG／Kから$\lambda(G)$の上への同型写像である。

Gの部分群Qが正規部分群であるときGから商群G／Qの上への写像を$\lambda(\sigma)=\sigma Q$によって定めると，σ，$\tau\in G$に対して

$$\lambda(\sigma\tau)=\sigma\tau Q=\sigma Q\cdot\tau Q=\lambda(\sigma)\cdot\lambda(\tau)$$

であるのでλは準同型写像である。G／Qの単位要素である剰余類Qはその逆像とも等しいのであるからこの写像の核でもあって，したがってこの写像はGからG／Qの上への自然準同型写像とよばれるものである。

§２．群の可解性の定義と可解群の性質

ここで群の可解性の定義および可解である群の基本的性質を示す。QをGの正規部分群のひとつ，λをGからG′上への準同型写像とすればQ′$=\lambda(Q)$とかくとき，つねにG／QからG′／Q′上への自然準同型写像ξが存在する。[補助定理Ⅰ]

∵）G／Qの要素であるσ Qのλによる像を$\lambda(Q)=Q'$とかいて，$\xi(\sigma Q)=\lambda(\sigma)Q'$としてみよう。すると

$$\xi(\sigma Q\cdot\tau Q)=\xi(\sigma\tau Q)=\lambda(\sigma\tau)Q'=\lambda(\sigma)\lambda(\tau)Q'$$
$$=\lambda(\sigma)Q'\cdot\lambda(\tau)Q'=\xi(\sigma Q)\xi(\tau Q)$$

よりξは準同型でありξによってG／QがG′／Q′の上に写像されることは，λが上への写像であることから$\sigma'\in G'$に対して$\lambda(\sigma)=\sigma'$なる$\sigma\in G$が必ず存在してσ' $Q'=\lambda(\sigma)Q'=\xi(\sigma.Q)$となることより明かである。(証明終)

さらにξの核に属するσ Qに対しては

$$\xi(\sigma Q)=\lambda(\sigma)Q'=Q'=(G'/Q'\text{の単位要素})$$

であって$\lambda(\sigma)\in Q'$。従って$\sigma\in\lambda^{-1}(Q')$である。それ故$Q=\lambda^{-1}(Q')$のときは$\sigma\in Q$。つまり$\sigma Q=Q$となり$G'/Q'$の単位要素に写像されるのは$G/Q$の単位要素のみであって$\xi$は1：1写像となり同型写像でもある。

［補助定理II］

QがGの正規部分群であるとき　Gの任意の部分群Vに対して，

V∩QはVの正規部分群である。

V／（V∩Q）はVQ／Qと同型である。

ここに，$VQ=\bigcup_{\sigma\in V}\sigma Q$である。

（補助定理IIの証明）λをGからG／Qの上への準同型写像とする。λを部分群Vだけに限定して考えればこれはもちろんVからG／Qの中へ準同型写像ξとみることができる。このとき像$\xi(V)$は$\sigma\in V$の剰余類σQの全体であるのでそれは実に商群VQ／Qである。ξの核は$\xi(\sigma)=$（Qの単位元）$=Q$を満たすσ（$\in V$）全体であるので$\sigma Q=Q\therefore\sigma\in Q\therefore\sigma\in(V\cap Q)$。

逆に$\sigma\in(V\cap Q)$に対して$\xi(\sigma)=\sigma Q=Q=$（Qの単位元）なので（V∩Q）＝（Qの単位元)。つまりV∩Qはξの核であるのでVの正規部分群である。次に補助定理IでVからVQ／Qの上への準同型写像は存在するのでVの正規部分群V∩Qを法とする商群V／（V∩Q）とVQ／Qの正規部分群ξ（V∩Q）＝{Qの単位元}を法とする商群［VQ／Q］／{Qの単位元}＝VQ／Qとの間に同型写像が定義できる。つまり両者は同型である。（証明終）

この補助定理IIから直ちにG／QがAbel群ならVQ／QがAbel群であるのでこれと同型なV／（V∩Q）はAbel群であるという重要な結論を引き出すことが出来る。

定義：群Gの正規部分群の列G，G_1，G_2……，$G_n=1$をその商群G_{k-1}/G_k（k＝1，2，………，n）がAbel群になるようにとれるとき，群Gは可解である。

定理　1．可解群の任意の部分群は可解である。

［証明］Gが可解群であるときG_k（k＝1，2，……，n；$G_n=1$）をGの正規部分群の減少列のひとつとする。いまGの任意の部分群をVとするとき

$$V_k = V \cap G_k \quad (G_0 = G)$$

とすると

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n = 1$$

であり

$$V_{k-1} \cap G_k = (V \cap G_{k-1}) \cap G_k = V \cap (G_{k-1} \cap G_k) = V \cap G_k = V_k.$$

ところでG_kはG_{k-1}の正規部分群であって定義よりV_{k-1}はG_{k-1}の部分群であるので$V_{k-1} \cap G_k = V_k$は補助定理IIよりV_{k-1}の正規部分群であってV_k $(k=1, \cdots, n)$は正規部分群の列をつくる。そしてG_{k-1}/G_kは Abel 群なのであるから補助定理IIのあとのことより$V_{k-1}/(V_{k-1} \cap G_k) = V_{k-1}/V_k$は Abel 群なのである。よってGの部分群Vは正規部分群の列を持ちその商群が Abel 群となって可解である。

（証明終）

次にある可解群Gに対してそのGに属する正規部分群の列G_k $(k=1, 2, \cdots, n ; G_n = 1)$を考える。$\lambda$を任意の準同型写像とするとき$\lambda(G) = G'$であるとする。このとき$\lambda(G_k) = G_k'$ $(k=1, \cdots\cdots, n)$はG'に属する正規部分群の減少列をなすことが以下のようにして示される：まず準同型写像λをG_{k-1}に限定して考えると$\sigma' \in G_k{}'_{-1}$, $\tau' \in G_k'$に対して$\lambda(\sigma) = \sigma'$, $\lambda(\tau) = \tau'$を満たす$\sigma \in G_{k-1}$, $\tau \in G_k$は必ず存在する。G_kはG_{k-1}の正規部分群なのであるから$\sigma\tau\sigma^{-1} \in G_k$である。これを$\lambda$で写像すれば$\sigma'\tau'\sigma'^{-1} \in G_k'$ $[\sigma' \in G_k{}'_{-1}, \tau' \in G_k']$となるので$G_k'$は$G_{k-1}'$の正規部分群である。それ故補助定理Iよりこの準同型写像はG_{k-1}/G_kからG_{k-1}'/G_k'の上への自然準同型写像：

$$\xi(\sigma G_k) = \lambda(\sigma) G_k'$$

を定義できる。このときG_{k-1}/G_kは Abel 群であるのでG_{k-1}'/G_k'も Abel 群となっている。以上よりつぎの結果が得られる。

定理　2．可解群の準同型な像は可解群である。

参考文献

[1] C. Chevalley : Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946.

[2] 川久保勝夫：変換群論，岩波書店，1987.

[3] H. Ohmori, Homomorphic images of Lie group, J. Math. Soc. Japan 18, 1966.

[4] E. Calabi, On differentiable actions of compact Lie groups on manifolds, Proc. Conf. on Transformation group, Springer, 1968.

[5] 佐武一郎：線形代数学，裳華房，1976.

[6] J. F. Adams, Lie groups, Benjamin, 1965.