空気抵抗をうける放物体の運動

Projectile Motion under the Air Resistance

新潟歯学部　村　田　　　浩
阿　部　邦　昭
歯　学　部　立　川　法　清

Hiroshi MURATA and Kuniaki ABE
Physics Laboratory, Nippon Dental University,
Hamaura-cho, Niigata 951, JAPAN

Noriki TACHIKAWA
Physics Laboratory, Nippon Dental University,
Fujimi, Chiyoda-ku, Tokyo 102, JAPAN

(1985年12月19日 受理)

§1. はじめに

地上で投げ出された物体は放物線軌道を描いて飛んでいく。これは，大抵の物理学の教科書の最初の方に，実際の運動もそうであるという意味を込めて，書かれていることがらである。確かに，一様な重力が作用している場合，重力の方向に y 軸，それと垂直な方向に x 軸をとり，力学の運動方程式を解くと，y は x の2次関数になる。この2次関数を放物線と呼ぶ理由もここにある。

ところが，日常よく見る事実はそうでない場合が多い。現実の石やボールが放物線軌道を描いて飛んでいくのはむしろ稀である。高く，遠くまで投げ上げられたボールはほとんど鉛直に落ちてくるように見える。ハイクリアーされたバトミントンのシャトルコックなどは，エンドライン上に将に鉛直に落ちてくる。このような運動を説明するには空気抵抗を考えに入れればよいことはすぐにわかる。y 方向の運動は昇っていくときと降りてくるときと全く対称であるが，速度の x 成分は抵抗のためどんどん小さくなっていくから，

放物線のような運動の対称性は崩れてしまうからである。

速さが充分に小さい場合には，抵抗は速度に比例するので，運動方程式を解くのは容易である。その他の場合でも，計算機を使えば軌道を描くことが出来る。

一般教育の物理学の最初に力学をとりあげ，“初期条件という偶然性を媒介として軌道という必然性が実現される”，という力学的因果律を学ぶというならば，やはり，その軌道は現実とかなりよく一致するものでなければならないと思われる。このような観点から，一般教育の力学の再検討をしたいというのがこの論文の出発点である。

§2. 運動の測定

学生実験で使っているような装置で，物体の運動を測定するのは少し面倒ではあるが，工夫すれば出来ないことではない。われわれは学生実験用のストロボ装置を光源として，普通のカメラで軌道を撮影した。まず，比較的抵抗の大きいシャトルの運動をとりあげた

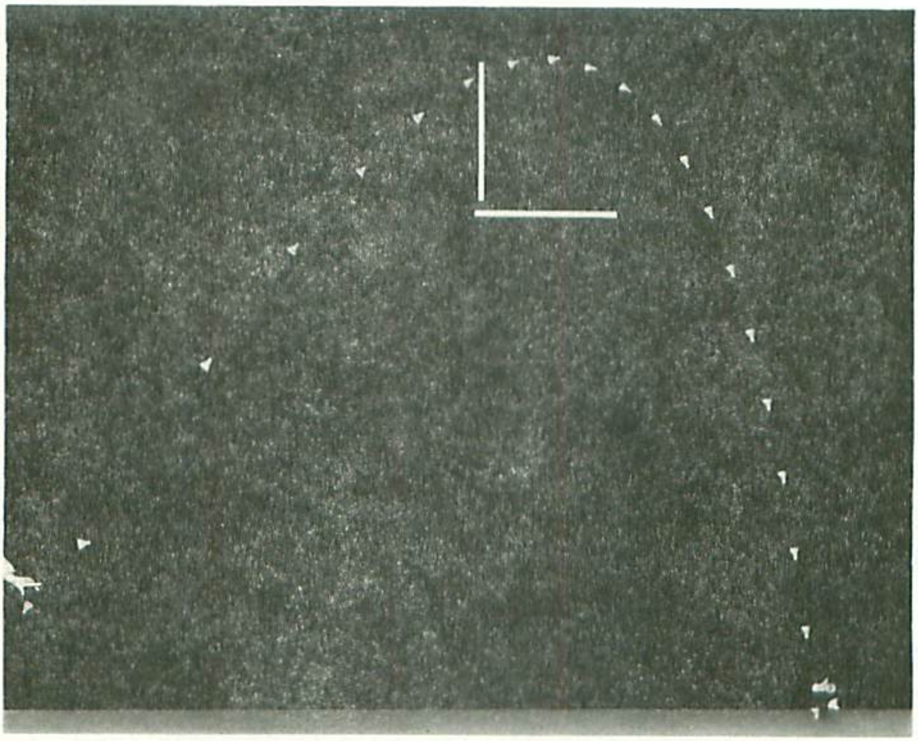

図1　シャトルの運動
距離 15m；レンズ F1.2，開放；フィルム ASA 400，黒白
ストロボ点滅周波数 10.0Hz

表 1　シャトルの座標

x (m)	y (m)
0.0	0.0
0.61	0.82
1.08	1.34
1.48	1.74
1.84	1.97
2.16	2.10
2.43	2.12
2.71	2.05
2.98	1.88
3.17	1.67
3.36	1.37
3.53	1.01
3.67	0.59
3.80	0.14
3.92	−0.34
4.03	−0.86
4.11	−1.41
4.19	−1.97

のであるが，それでも放物線軌道からのずれが一目でわかるようになるには 3〜4m 以上の高さを必要とした。そのため天井の高い体育館を使用した。周囲からの反射光を妨ぐために，約 6m×6m の暗幕を上から下ろして，その前でシャトルを打ち上げ，ストロボ点滅周波数を 10.0Hz にし，約 15m 離れた位置から撮影した。その一枚が図 1 の写真である。図の中のスケールは 1m なので，それを基準として，視差の影響は無視して，シャトルの位置座標を決めると表 1 のようになる。ただし，打ち出したばかりのシャトルはまだ安定してないので，最初の 2 点は無視した。

§ 3. 運動方程式とその解

適当な仮定に基ずいて運動方程式を立て，それを解くことによって，図 1 に一致するような軌道を導くのが次の課題である。物体を投げ出した点を原点として，鉛直上向きに y 軸，初速度ベクトルと y 軸がきめる平面内に水平に x 軸をとる。運動はこの平面内で行われるから，速度ベクトルを $\boldsymbol{V}=(u, v)$ とし，その初期条件を $\boldsymbol{V}_0=(u_0, v_0)$ とする。また，打上げの高さが 5m 位のシャトルのように遅い速度の場合，抵抗力はその速度に比例すると思われるので，運動方程式は

$$\begin{cases} m\dfrac{du}{dt} = -au \\ m\dfrac{dv}{dt} = -av - mg \end{cases} \tag{1}$$

と書ける。ただし，a は抵抗の大きさを表わす比例定数である。

$t=0$ で，$u=u_0$, $v=v_0$ および $x=y=0$ だから，(1) 式を積分していくと，

$$\begin{cases} u = u_0 e^{-\frac{a}{m}t} \\ v = \left(v_0 + \dfrac{mg}{a}\right)e^{-\frac{a}{m}t} - \dfrac{mg}{a} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{mu_0}{a}(1 - e^{-\frac{a}{m}t}) \\ y = \dfrac{mv_0}{a}\left(1 + \dfrac{mg}{av_0}\right)(1 - e^{-\frac{a}{m}t}) - \dfrac{mg}{a}t \end{cases} \tag{3}$$

ここで，

$$\frac{a}{mu_0}x = X,\ \frac{a}{mv_0}y = Y,\ \frac{mg}{av_0} = G \tag{4}$$

とおくと，(3) 式は

$$\begin{cases} X = 1 - e^{-\frac{a}{m}t} \\ Y = (1+G)(1 - e^{-\frac{a}{m}t}) - \dfrac{g}{v_0}t \end{cases} \tag{5}$$

となる。(5) 式より $0 \leqq X < 1$ だから，軌道を表わす式

$$Y = (1+G)X + G\log(1-X) \quad (0 \leqq X < 1) \tag{6}$$

が導かれる。この式の最大値を与える点は

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{1+G}, 1 - G\log\left(1+\frac{1}{G}\right)\right) \tag{7}$$

となる。

いくつかの G の値について，(6) 式を図示すると図2のようになる。ただし，Y 座標は最大値が1になるように換算したものである。この図から，緩やかなカーブで昇っていったシャトルが，最高点を通過するとほぼ鉛直に落ちてくるという現象を (6) 式によって説明出来そうなことがわかる。また，図1は全体としては $G=0.7$ 近辺の曲線で表わせそうである。しかし，最初の2点を除くと，当然 G はもう少し大きな値をとらなければならない。

実測値，表1を図示すると図3の○のようになる。

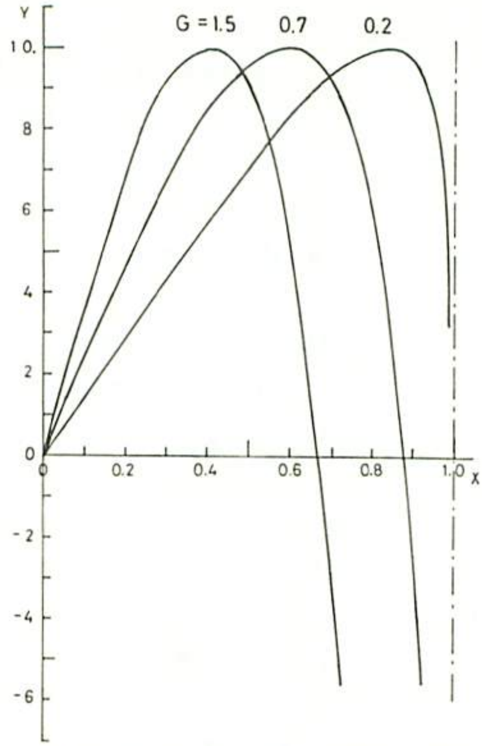

図 2　速度に比例する抵抗が働く場合の運動

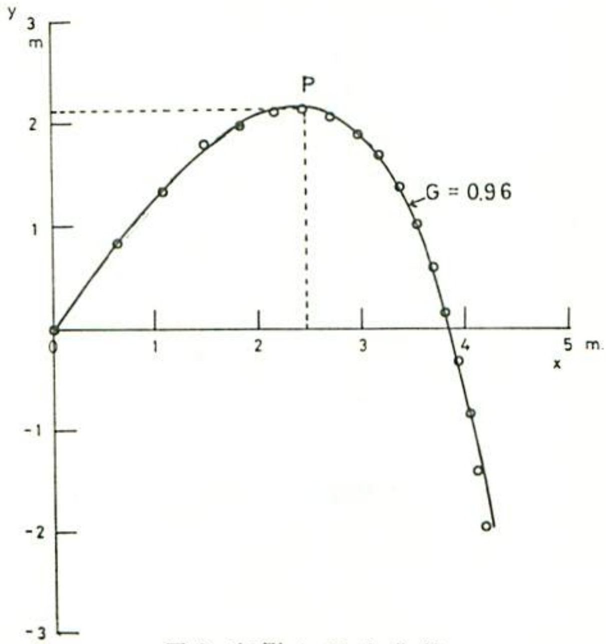

図 3 実 測 と 理 論 曲 線
○ 実測，　— 理論，頂点 P(2.43, 2.12)

(6) 式を図示するには少し注意が必要である。それは，(6) 式がいわば規格化された座標 (X, Y) で表わされているから，これを実座標 (x, y) に戻すには目盛りをどうとったらよいかという点である。もちろん，シャトルの質量 m, 初速度成分 u_0, v_0 を測定すれば (4) 式によって実座標に戻せるのであるが，今回のように粗い測定で u_0, v_0 を決めるのは誤差が大きくなりすぎる。そこで，軌道全体からそれらを決める方法をとった。最もよいと思われる方法として，頂点 p の位置が一致するように座標 (X, Y)→(x, y) の変換をした。さらに軌道がよく一致するように G の値を決める。(6) 式から，$G=0.96$ のとき図3の実線で表わしたような曲線が得られる。当然のことながら，これは実測値をよく表わしている。必要なことは，この G の値から導かれる抵抗係数 a の値が，他の実験から得られる値と一致するかどうかである。

ストロボの点滅周期が1/10秒であることから，表1の y の2番目の値に10倍して $v_0=8.2\text{m/s}$ とし，$m=4.6\text{g}$, $g=9.8\text{m/s}^2$ を (4) 式に代入すると $a=5.7\times10^{-3}\text{kg/s}$ となる。この値は，たとえば，自由落下の最終速度 v_e の測定によって確かめることが出来る。(2) の下の式から，$t\to\infty$ のとき $v\to v_e=\text{mg}/a$ となるから，一定になったときの落下速度を測定すればよい。残念ながら，今回は落下距離が短かくてこの測定は出来なかった。

§4. む す び

速度に比例する抵抗を仮定すると，運動の法則によってシャトルの運動をよく説明出来ることがわかった。次の課題はもう少し精度の高いデータをとり，正確な初速度を求め，測定との比較から G を決め，a を求める。その a の値が，別の実験，たとえば自由落下の最終速度 v_e の測定から得られた値と一致することを確かめなければならない。

さらに，図2の $G=0.2$ の曲線のようにほとんど鉛直に落ちてくるような絵も撮ってみたい。また，テニスボールなどでは回転の影響はどうであろうか。それには，まずストロボの点滅周波数を大きくしなければならないのであるが，そうすると光量が落ちて鮮明な絵が得にくいという難点がある。次に，より広い範囲にわたって撮らなければならないが，そうすると，余分な反射光を遮蔽するのが困難になる。しかしながら，このような難点は工夫すれば克服出来ることであろう。

最後に，撮影の際に協力して頂いた新潟歯学部物理学教室の山下陽介氏に感謝いたします。