

LCR 直列回路による共振現象

歯学部 立川法清

新潟歯学部 村田浩

Noriki TACHIKAWA and Hiroshi MURATA

Resonance Phenomena shown by a Series LCR Circuit

(1977年12月26日受理)

LCR 直列回路による共振現象

§ 1 は じ め に

エレクトロニクスの装置は、真空管、ダイオード、トランジスタのようなエレクトロニクス素子と、抵抗、コイル、コンデンサーなどの回路素子からできている。エレクトロニクス素子は、真空中や物質中での電子の運動を適当に制御することによって所定の機能をはたしている。したがって、現代の複雑なエレクトロニクス装置であるラジオ、テレビジョン、各種の測定器、電卓、電子計算機、各種の制御機器の原理も、基本的には、物理学の一分野である電磁気学の法則によって解明し得るものである。

回路理論はそのために存在しているといってもよい。しかしながら、回路理論は難かしい理論である。それは、あまりにも複雑な回路を対象とするようになったためでもあるが、より基本的には途中のいくつかの近似のためもある。回路理論の法則を物理的にどのように理解したらよいか、不明な点が多いということである。たとえば、交流回路の Kirchhoff の法則を、電磁気学の Maxwell 方程式から導くという問題である。その間に、いくつかの仮定をしなければならないが、その仮定の妥当性については、物理的には、かなり不明な点が多い。

そのような点を考慮すると、物理学の問題としては、簡単な回路をとりあげざるを得ない。われわれは、ここで LCR 直列回路について考えてみたい。この回路は、コイル（インダクタンス） L 、コンデンサー（静電容量） C 、抵抗 R を直列につなげたものである。この回路に、周波数 f の正弦波交流を入力させたとき、インダクタンス L 、キャパシタンス C が定義できて、しかも、それが周波数 f に依存しないと仮定すると、交流回路の Kirchhoff の法則は、2階線形微分方程式となる。したがって、これからは単なる数学の問題となるから、その解は厳密に正しい解となる。十分に精度の高い実験を行えば、理論と実験は正確に一致するはずである。もし、両者の間にずれがあるならばそれは交流理論の適用限界を示すものと言えよう。

そのような意味で、交流理論を検証し、理解を深めるために、LCR 直列回路の測定と理論的計算を行い、結果の比較検討をしたい。

§ 2 理 論

図-1のように、インダクタンス L 、キャパシタンス C 、抵抗 R を直列に接続し、周波数 f の正弦波交流電圧 V_{in} を入力させる。回路に流れる電流を I とすると、Kirchhoff の第2法則から

$$L \frac{dI}{dt} + (R+r)I + \frac{1}{C} \int Idt = V_{in} \dots\dots\dots(1)$$

が導かれる。ただし、

$$V_{in} = V_o \cos(2\pi ft) \dots\dots\dots(2)$$

であり、 r はコイルの直流抵抗で、最初はこれを無視した式を考えてもよい。

(1) 式の定常解は

$$I = \frac{V_o}{Z} \cos(2\pi ft - \phi) \dots\dots\dots(3)$$

となる。ただし、インピーダンス Z 、位相のずれ ϕ は

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2} \dots\dots\dots(4)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}}{R+r} \right) \dots\dots\dots(5)$$

となる。

したがって、出力電圧は、

$$V_{out} = \frac{R}{Z} V_o \cos(2\pi ft - \phi) \dots\dots\dots(6)$$

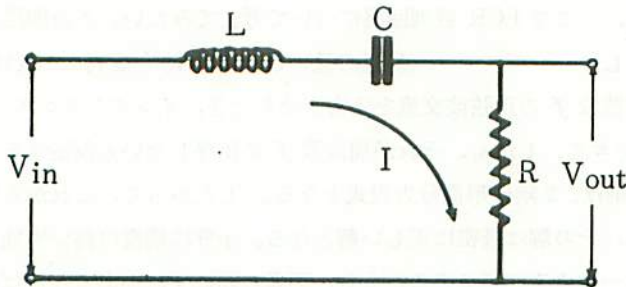


図-1 LCR 直列共振回路

となり、共振周波数 f_0 、および回路の Q 値は、

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \dots\dots\dots(7)$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{2\pi f_0 L}{R+r} \dots\dots\dots(8)$$

となる。ただし、 Δf は共振曲線の半値幅である。

この V_{in} と V_{out} を交流電圧計で測定すると、その振幅に比例した値 V'_{in} 、 V'_{out} が得られて

$$\frac{V'_{out}}{V'_{in}} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2}} \dots\dots\dots(9)$$

となる。

§ 3 実験の方法と結果

図-1の LCR 直列共振回路に、図-2のように発振器と電圧計をつなぎ、 V'_{in} と V'_{out} を測定する。ここで発振器は菊水電子の ORC-433 RC 発振器を、電圧計は NF 社の M-172 高感度電子電圧計を用いた。

また、取り扱いのしやすさを考えて、発振器からの入力周波数 f は可聴領域 (50 Hz ~ 20 kHz) とし、 f_0 をその中心附近 (数 kHz) になるようにした。さらに次の2つの場合について LCR の値を決めた。

(1) 共振曲線の形が鋭くなるように Q 値をできるだけ大きくなるようにする。そのためには (8) 式から L の値を大きくすればよいことがわかるが、それにとまって r の値も大きくなり、共振曲線のピークの位置が下ってしまうという難点があって、この場合は

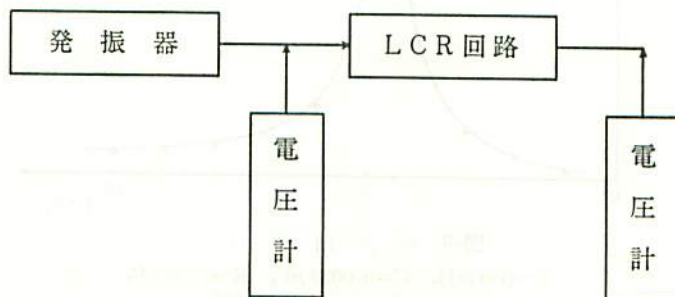


図-2 実験方法

$Q=10$ 程度が良い。具体的には、 $L=530$ mH ($r=0.35$ k Ω), $C=0.0023$ μ F, $R=1.3$ k Ω とした、このとき、理論上、 $f_0=4.56$ kHz, $Q=9$, ピークの高さ: $R/(R+r)=0.788$ となる。

(2) R に比べて r を無視できるような組合せ、すなわちピークの高さがほとんど1になるような組合せということで、 $L=100$ mH ($r=0.086$ k Ω), $C=0.020$ μ F, $R=2.93$ k Ω を選んだ。

この場合は、 $f_0=3.56$ kHz であるが、 $Q=0.69$ と小さいので、共振曲線は幅が広くなり、形も悪くなると予想される。

以上の2つの場合について、測定を行うと図-3、図-4のマルで示したような結果が得られた。図-4は予想通り、共振曲線とはいいい難いような形になったが、周波数領域が広い場合の通常用いられる方法に従って、 f を対数目盛とする片対数のグラフ用紙を使用すると図-5のように鋭い形になる。しかしながら、発振器のレンジの切り換えが、10 kHz から 100 kHz と対数的になっているからということ以外に f を対数でとるという理論的根拠は見い出せないので、やはり共振曲線としては良いモデルとはいいい難いであろう。

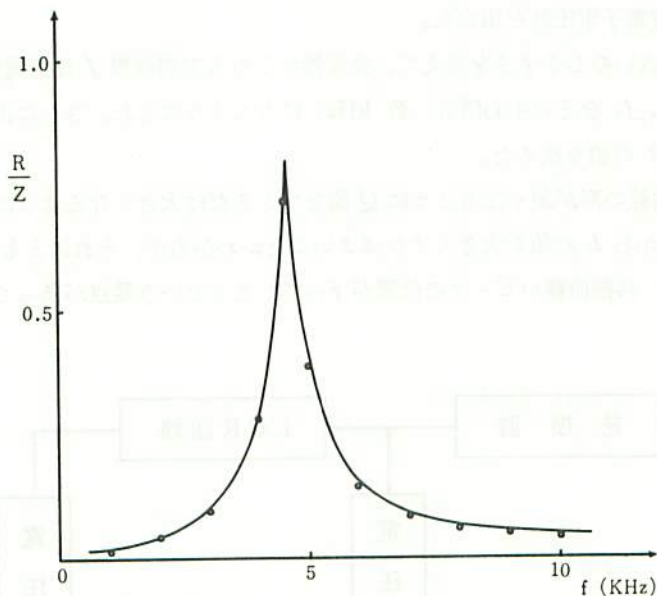


図-3 共振曲線 (1)

$L=530$ mH, $C=0.0023$ μ F, $R=1.30$ k Ω ,
 $r=0.351$ k Ω , $f_0=4.56$ kHz (理論値),
 $f_0=4.5$ kHz (実験値), $Q=9.1$

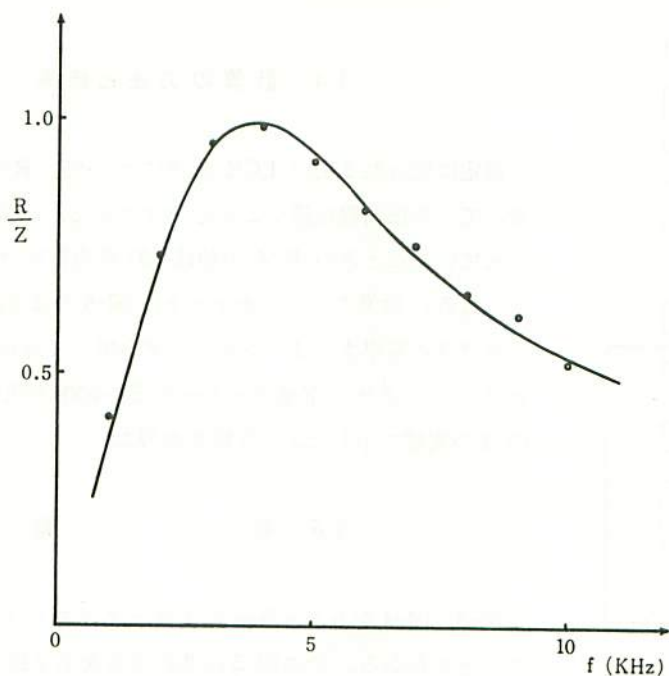


図-4 共振曲線 (2)

$L=87.2 \text{ mH}$, $C=0.020 \mu\text{F}$, $R=2.93 \text{ k}\Omega$, $r=0.086 \text{ k}\Omega$,
 $f_0=3.81 \text{ kHz}$ (理論値), $f_0=3.80 \text{ kHz}$ (実験値) $Q=0.69$,

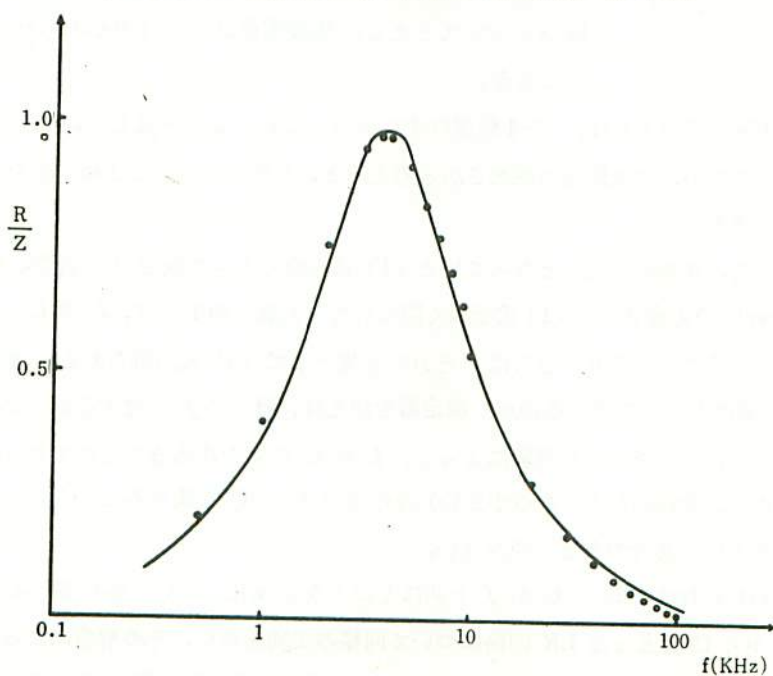


図-5 共振曲線 (2)

$L=87.2 \text{ mH}$, $C=0.020 \mu\text{F}$, $R=2.93 \text{ k}\Omega$, $r=0.086 \text{ k}\Omega$,
 $f_0=3.81$ (理論値), $f_0=3.8$ (実験値), $Q=0.69$

§ 4 計算の方法と結果

測定に使った2組の LCR の値について、 R/Z を理論的に求めて、共振曲線を描くことを考えてみる。周波数 f を変化させていったときの R/Z の値は (9) 式の数値計算によって求められる。計算のフローチャートは図-6 のようになるから、プログラム電卓またはコンピュータを用いて計算する。われわれは、プログラム電卓キャノラ SX-300 を用いて、図-3、図-4 の実線で示したような結果を得た。

§ 5 考 察

図-3、図-4 をみると理論と実験とはかなりよく一致していることがわかる。特に図-3 は共振現象を示す良い例と云える。このことは交流理論の正しさを証明しているのであるが、詳細に検討してみると、その限界も読みとることができる。それは図-3 においてさえも、実験誤差以上のずれがみられるという点である。

通常の実験結果であれば、図-4 程度のずれがあっても、よく一致していると云いきってよいのであるが、交流理論の厳密さから考えると、単純に、もっとよい一致を期待してしまうのである。

これは、この理論の出発点となっている (1) 式を導くときの仮定の妥当性の問題である。Maxwell の方程式から (1) 式を導く際に行なった仮定の1つは、 L や C が f に依存しないということであり、さらに、それを前提として (3) 式が得られる。また一体、 L や C の値はどのようにして決めるのか。測定器を使えば、特定の f に対する値となってしまう。そもそも、ここで行った実験によって、 L や C の値を決めることができるはずである。ところが、曲線の左の (f の小さい) 方の点で L や C を決めると、右の方のずれが大きくなるという具合でうまくゆかない。

そこでわれわれは、 L や C が f と共にどのように変化していくかを調べるために、まず図-1 から C をとった LR 回路について同様の実験を行い、その解析によって、可聴領域の任意の f に対する L の値を求めてみた。その結果、 L の値は f と共にわずかで

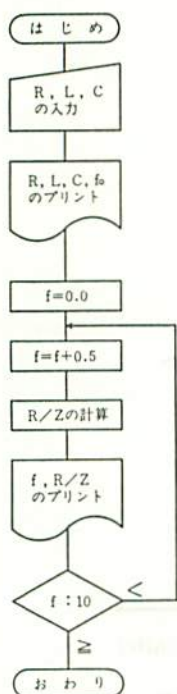


図-6 R/Z の計算フローチャート

はあるが増加していく傾向があることがわかった。

C の場合も同様な解析を行うと、単純な傾向は示さないが、各々の f によって多少異なった値をとることがわかった。もちろん、ここにあげた結果は、 L や C を作っている物質によって異なってくるであろう。

したがって、 f を指定しないと L や C を厳密に決めることが出来ないことがわかる。われわれは、 $f=f_0$ のときの L と C の値をとった。そうすれば実験値に最も近い理論曲線を得られるからである。

以上のような考察から、交流理論は数学的な厳密さとは裏腹に、物理的にはかなりのあいまいさをもった理論であることがわかる。

なお、この小論はその一部を一般教育の学生実験のテーマとして取り上げていくことを目的として書いたもので、測定器具は全て学生実験用の機種を使った。特に電子電圧計が廉価に得られるようになったため、このようなテーマを学生実験として取り上げられるようになったのは幸いである。

最後に多大な助言をいただいた鮎川教授に深く感謝致します。