

等電位線実験における諸問題

新潟歯学部 村 田 浩
桜 岡 充

Hiroshi MURATA and Mitsuru SAKURAOKA

Some Problems for the Experiment on the Electrostatic Potential

(1977年12月21日受理)

等電位線実験における諸問題

§ 1 序 論

自然の法則性を認識する場合に、種々の自然現象は関与する物質がその性質や互いの位置関係によって定まるような影響を与え合う＝相互作用の結果のできごとであるわけであるが、これを物質のまわりの空間にこの現象を誘起する相互作用の領域＝場が広がっているものとしてとらえ直し、時間と場所の関数として場を考えてゆくことは非常に有効な場合が多い。この物理的場という考え方は古典物理学のみならず、現代物理学における重要な概念となっている。その最も簡単な例として場の概念によって統一的に完成された古典電磁気学の理論体系をあげることができる。電磁気学の場は電氣的、磁氣的な力の場であって、ここではその最も基本的な例として静電場をとりあげる。

静電場は静止した電荷が自分のまわりに造る Coulomb 場であるが、場内の任意の一点に置かれた試験電荷に働く力の場であり力の方向を連ねたものが電気力線、これと直交する面が等電位面である。(良く知られている様に静電場は保存場であるため通常の電位ポテンシャルを導入した取扱いが便利になる。) そこで、たとえば等電位線を実験的に求めそれが Coulomb の法則から理論的に導かれることを知ることは電磁気学の基本法則の一つであるこの Coulomb の法則を検証し、あわせて場の概念を理解する上で極めて重要な課題となってくる。

ところが通常の場合、静電場で働く力は微弱であるためその等電位面を求めることは、技術的に非常に困難な仕事となる。そのため大抵はこれと理論的に等価な定常電流場を用いている。われわれもこの方法を採用するがまず無限に広い薄板状導体の2点に正負の電極を置いた時の場を考えると、等電位線(面)は Gauss の法則あるいは Laplace 方程式を解くことによって Apollonios の円となることが知られている¹⁾。

一方で実際には限りなく広いとみなせる条件をつくり出すことが困難であるために、理論と実験とのずれが大きく、電磁場の法則を検証し理解するという実験の目的を著しく損

ねている。これを補うためには、実験条件を忠実に考慮した等電位線を理論的に描いてみせることがどうしても必要である。これは数学的には二次元の Laplace 方程式の境界値問題であるが Schwarz 変換を行うことにより容易に解くことができる。解は Weierstrass の \wp 関数の簡単な組合せとなるが実験と比較するためにはコンピュータを用いた数値計算が必要である。この解は境界条件を考慮した厳密な解であるので、実験は当然これを再現することが期待される。

§ 2 実験方法とその結果

通常はカーボン紙や謄写ファックス用紙等電気抵抗が適当な大きさの紙に直接電流を流し等電位線を描く方法をとるのであるが、これは使用した紙の不均質性等による影響がでやすいので、われわれは平らな水盤を使って間接的に求める方法を採用した。図-1のような 35 cm × 25 cm の矩形の浅い透明なアクリル樹脂製の水槽の底に方眼紙をバックし中心線より左右に 5 cm 離して電極をセットする。これを正確に水平に置き 5 mm 位の深さに水道水を入れて、電極に 10 V の交流電圧をかける。電圧計の一方の端子を片方の電極につけ、もう一方の電圧計端子には探針をつけて、たとえば 4.0 V の電位線の座標を読み取る。交流は商用電源をスライダックで下げたもので十分であり、電圧計はデジタル・ボルトメータを使うと便利である。

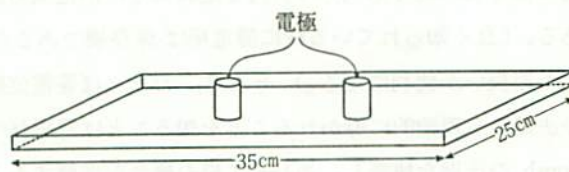


図-1 水 盤

測定の結果、図-2にあるような等電位点を得られた。この図には水槽が限りなく広い場合の理論的等電位線：Apollonius の円も付記した。図を見て明らかな様に 3.0 V の線でもかなりずれており、さらに外側では全く離れてしまう。このように無限に広い領域の解をこの実験の理論的近似解に用いたのでは、この実験により Coulomb の法則あるいはより一般的に電磁場の法則を検証するという目的は全く達せられないことになる。面倒でも厳密に境界条件を満足する解を求めねばならない。

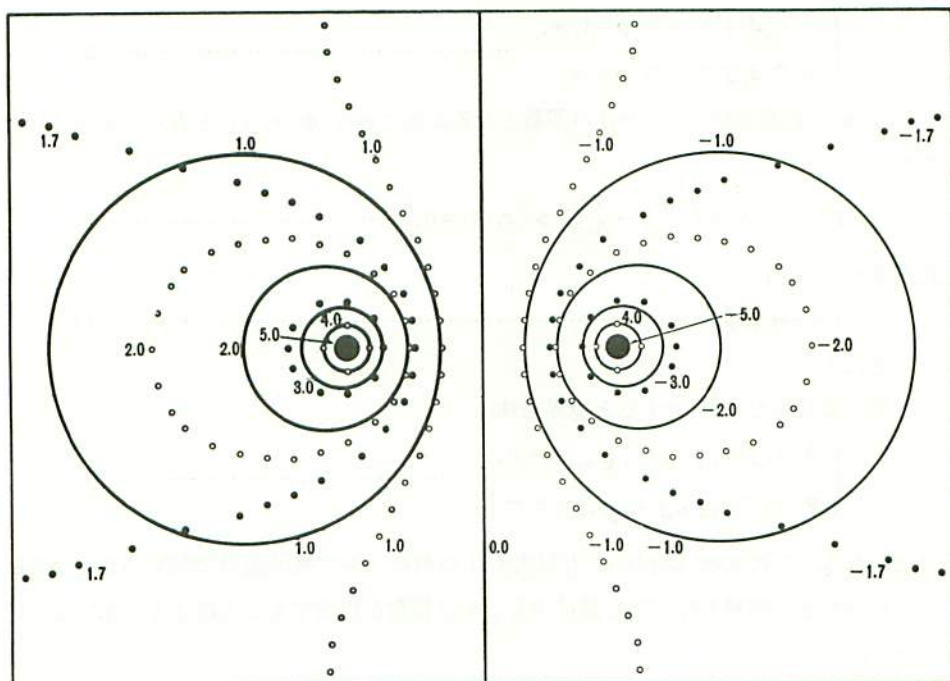


図-2 実験結果と Apollonios の円

§ 3 二次元無限領域に対する解

限りなく広い二次元導体の中に図-3のように半径 r の円筒形電極を $2d$ だけ離して置き電極の中心を結ぶ方向に x 軸, 両電極の中点を通りこれと垂直な方向を y 軸, 導体の厚みを z 軸方向に d とする。定常状態を考えるので電場 E はスカラー・ポテンシャル ϕ を導入することによって

$$E = -\nabla \phi \dots\dots\dots(1)$$

とかける。導体の電気伝導率を σ , 抵抗率を ρ とすると

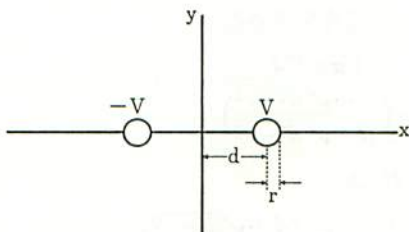


図-3 二次元無限領域

$$\begin{cases} |z| < d/2 \text{ のとき } \rho = 1/\sigma, \\ |z| > d/2 \text{ のとき } \rho = \infty. \end{cases} \dots\dots\dots(2)$$

(2) から ϕ は位置座標 x, y だけの関数となるからこれを $\phi(x, y)$ と書く。電極以外の場所では

$$\nabla^2 \phi(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(x, y) = 0. \dots\dots\dots(3)$$

電流密度ベクトルは

$$\mathbf{J} = -\sigma \nabla \phi, \dots\dots\dots(4)$$

と表わされる。

両電極の電位差を $2V$ とすると境界条件は

$$\begin{cases} \phi(x, y) |_{(x-d)^2+y^2=r^2} = V, \\ \phi(x, y) |_{(x+d)^2+y^2=r^2} = -V, \end{cases} \dots\dots\dots(5)$$

で与えられる。二次元の Laplace 方程式 (3) の解のうちで無限遠点で勾配が 0 となる解の一次結合をとり境界条件 (5) を満足するように係数を決定することにより、求めるポテンシャルは

$$\phi(x, y) = \frac{V}{\ln\left(\frac{d+\sqrt{d^2-r^2}}{d-\sqrt{d^2-r^2}}\right)} \cdot \ln\left[\frac{(x+\sqrt{d^2-r^2})^2+y^2}{(x-\sqrt{d^2-r^2})^2+y^2}\right] \dots\dots\dots(6)$$

となる。従って等ポテンシャル線の方程式は $|\eta| \leq 1$ なる定数 η を導入して

$$\phi(x, y) = \eta V, \dots\dots\dots(7)$$

より、

$$(x-a)^2+y^2=c^2, \dots\dots\dots(8)$$

$$\begin{cases} a = \frac{(d+\sqrt{d^2-r^2})^\eta + (d-\sqrt{d^2-r^2})^\eta}{(d+\sqrt{d^2-r^2})^\eta - (d-\sqrt{d^2-r^2})^\eta} \sqrt{d^2-r^2}, \\ c = \frac{2r^\eta}{(d+\sqrt{d^2-r^2})^\eta - (d-\sqrt{d^2-r^2})^\eta} \sqrt{d^2-r^2}, \end{cases} \dots\dots\dots(9)$$

と求まる。(8) は図-2 に描かれているような Apollonios の円を表している。次に (4) より右側の電極から流れ出る全電流を求めると

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi\sigma Vd}{\ln\left(\frac{d+\sqrt{d^2-r^2}}{d-\sqrt{d^2-r^2}}\right)}, \dots\dots\dots(10)$$

二つの電極間の電気抵抗 R は

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma d} \ln\left(\frac{d+\sqrt{d^2-r^2}}{d-\sqrt{d^2-r^2}}\right),$$

今、 $r \ll d$ であるから

$$R \approx \frac{1}{2\pi\sigma d} \ln\left(\frac{2d}{r}\right), \dots\dots\dots(11)$$

となる。また (10) を (6) に代入すると

$$\phi(x, y) = \frac{I}{4\pi\sigma d} \ln\left\{\frac{(x + \sqrt{d^2 - r^2})^2 + y^2}{(x - \sqrt{d^2 - r^2})^2 + y^2}\right\} \dots\dots\dots(12)$$

と書けるが、これは点 $(\sqrt{d^2 - r^2}, 0)$ に電流湧き出し密度 I/d の線わき出しがあり、点 $(-\sqrt{d^2 - r^2}, 0)$ に I/d の線吸込みがある場合のポテンシャルである。又、これは方程式及び境界条件が全く同一な例：電極の中心より少し内側にずれた位置に線密度 $\epsilon I/\sigma d$ (ϵ : 誘電率) の大きさの正負の電荷を置いた場合の静電場と同等である。この位置のずれ $d - \sqrt{d^2 - r^2}$ は一般に r に比べても非常に小さいが、一方 d/r を厳密に 0 とするわけにはゆかない。(11) より $d/r = 0$ の時、 R が発散するからであり、このことから実際の場合に電極半径 r を余り小さくしない方が良いということが解る。

§ 4 矩形領域に対する解

図-1の実験条件に対応して複素平面 z_1 上に図-4のように矩形領域 $OABC$ 及び線湧き出し口、 P, Q をとり、この矩形領域内部を複素平面 z_2 の上半面に写像する Schwarz 変換を考える。この時 z_1 面の矩形の境界線は z_2 面の実軸に写像され頂点 A, B, C およびわき出し P, Q はそれぞれ図-5のように A', B', C' および P', Q' に、原点 O は無限遠点に写像される。この写像公式は

$$\frac{dz_1}{dz_2} = 2i [(z_2 - A')(z_2 - B')(z_2 - C')]^{-\frac{1}{2}}, \dots\dots\dots(13)$$

を解くことによって

$$z_2(z_1) = -\wp(z_1|4a, 4bi), \dots\dots\dots(14)$$

で与えられる²⁾。ただし Weierstrass の \wp 関数は

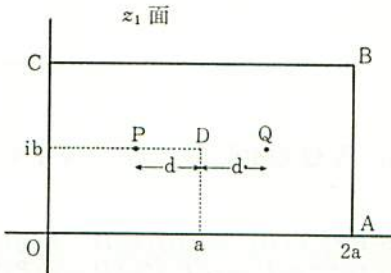


図-4 複素平面 z_1

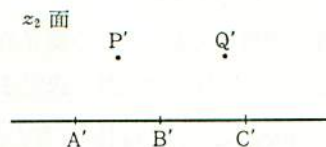


図-5 複素平面 z_2

$$\wp(z_1|4a, 4bi) = \left(\frac{1}{z_1}\right)^2 + \sum'_{m,n} \left[\frac{1}{(z_1 - 4am - 4bni)^2} - \frac{1}{(4am + 4bni)^2} \right], \dots\dots\dots(15)$$

で定義される。4a, 4bi は周期を表し Σ' は $m=n=0$ を除いて無限項の二重和をとることを意味している。境界条件はまず第一に z_1 面の矩形の境界が流線（電気力線）になるということであるから、 z_2 面の実軸が流線となるようなポテンシャルを求めればよい。これは図-6のように z_2 面の二点 P' に ξ の、 Q' に $-\xi$ のわき出しがある場合のポテンシャルを考えればよい。この複素ポテンシャルを z_1 面に変換することにより矩形領域の複素ポテンシャルが求まってくる。こうして得られた複素ポテンシャルは \wp 関数 (14) が周期 4a, 4bi の二重周期関数であること、およびその対称性から図-7のように湧き出し P, Q と同じ湧き出し P', Q' が繰り返されているという直感的描像に対応している。

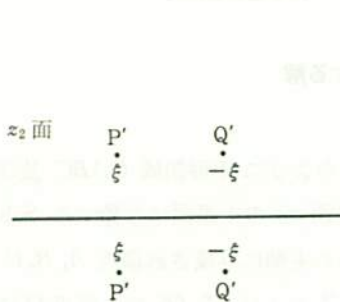


図-6 境界条件を満たす z_2 面

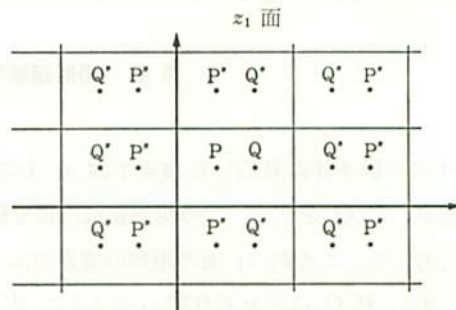


図-7 図-6に対応する z_1 面

図-6の複素ポテンシャルは

$$W(z_2) = -\frac{\xi}{2\pi\sigma} \ln \left\{ const. \frac{[z_2 - z_2(P)][z_2 - z_2(P)^*]}{[z_2 - z_2(Q)][z_2 - z_2(Q)^*]} \right\}, \dots\dots\dots(16)$$

と書ける³⁾。この複素ポテンシャル $W(z_2)$ の実部がポテンシャル $\phi(x, y)$ 、虚部が流れ関数 $\psi(x, y)$ を与える：

$$\begin{cases} \phi(x, y) = \text{Re} [W(z_2)], \\ \psi(x, y) = \text{Im} [W(z_2)], \\ z_1 = x + iy. \end{cases} \dots\dots\dots(17)$$

対称性を考慮してもう一つの境界条件即ち、 P, Q の中点 D でポテンシャル $\phi=0$ を科すことにより (16) の定数が決定されて

$$W(z_2) = -\frac{\xi}{2\pi\sigma} \ln \left\{ \frac{[z_2 - z_2(P)][z_2 - z_2(P)^*][z_2(D) - z_2(Q)][z_2(D) - z_2(Q)^*]}{[z_2 - z_2(Q)][z_2 - z_2(Q)^*][z_2(D) - z_2(P)][z_2(D) - z_2(P)^*]} \right\}, \dots\dots\dots(18)$$

が得られる。ただし、 P, Q 点是对数型分枝点であるので ψ に関しては

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{\text{Im} [W(a+ib-i\epsilon)]\} = 0, \dots\dots\dots(19)$$

なる分枝を選ぶことにする。

これが厳密解であるが実際に等電位線や電気力線を描くためには計算機を使って数値計算をする必要がある。ここでは $2a=35 \text{ cm}$, $2b=25 \text{ cm}$, $d=5 \text{ cm}$ および $r=0.4 \text{ cm}$ の実験条件の場合について行う。面倒な計算は (15) の二重和だけであって今の場合相対誤差の考察から $|m|=5$, $|n|=7$ 程度までの和で十分であることが解る。しかし念のため和を $|m|=10$, $|n|=14$ までとり、それ以上は積分で近似した。こうして計算した ψ 関数を使って (16), (17) 式から等電位線および電気力線を求めると図-8 のようになる。ただし等電位線に関しては $5\phi(x, y)/\phi(a-d-\frac{r}{2}, b)$ を、電気力線に関しては $2\pi\sigma\xi^{-1} \cdot \psi(x, y)$ を描いてある。

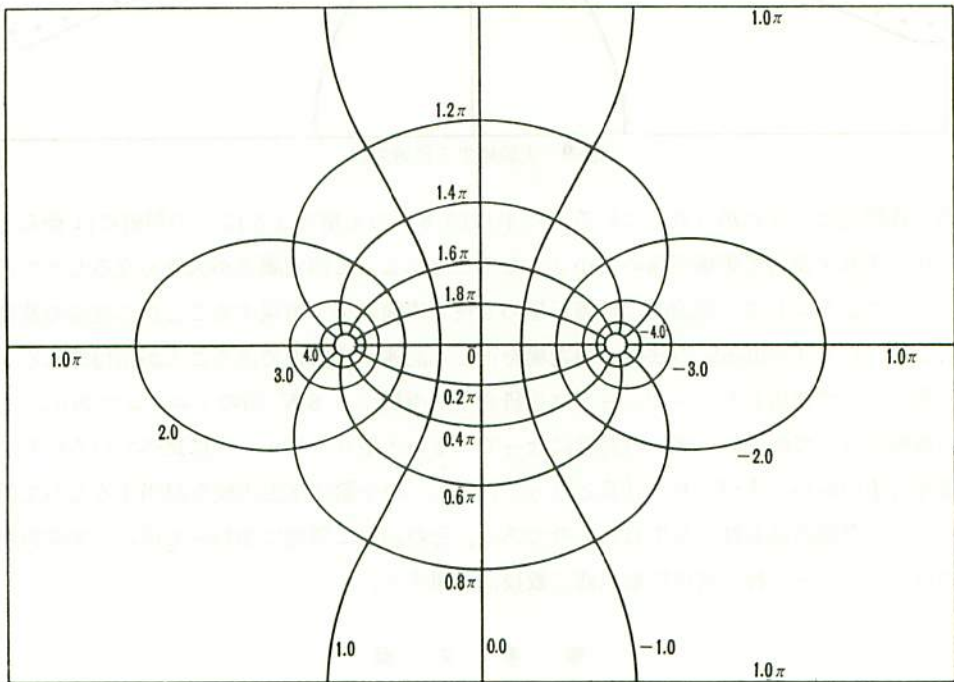


図-8 矩形領域における等電位線と電気力線

§ 5 考察とむすび

§2の実験と§4の等電位線の理論曲線を比較したのが図-9である。この図からも二つの結果はかなり良く一致することが解る。ただし念のため付した 1.7 V の線に於ては容

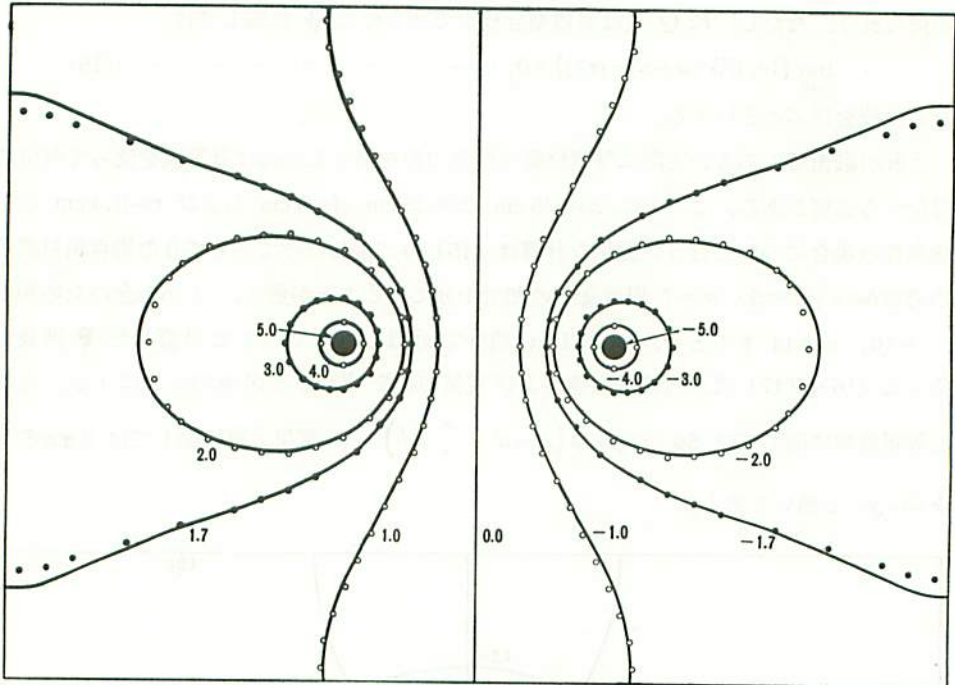


図-9 実験結果と理論曲線

器の端附近でのずれが目立っている。これは図-8からも解るようにこの付近には殆んど電流が流れず従って電場が極めて小さくなることによって測定誤差が大きくなるためである。このようにして、理論的な計算が極めて良く実験結果を再現することから理論の基礎となっている Coulomb の法則が静電場を正しく記述する法則であることが納得される。

尚、ここで使用したコンピュータは当研究室に所属する 8 K 語のミニコンであり、この機械にとって能力いっぱいの計算になってしまい大型コンピュータに比べていろいろな意味で手のかかる手づくりの計算となった。またこの小論は学生実験を担当するなかで教える側の準備の必要性から生れたものである。その過程で議論に加わって頂いた本学物理教室のメンバー、特に東京校鮎川武二教授に感謝する。

参 考 文 献

たとえば以下の文献を参照されたい。

- 1) 平田森三, 基礎物理学実験, 裳華房 (1972).
- 2) 犬井鉄郎, 柳原二郎, 一般関数論, 朝倉書店 (1965).
森田繁一他, 数学公式Ⅲ, 岩波書店 (1960).
- 3) W. K. H. Panofsky and M. Phyllips, Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley Publishing Company (1961).